Prova d'esame
Calcolo delle Probabilità e Statistica
13 gennaio 2015

Esercizio 1 (Solo 12 CFU) Consideriamo un pentagono i cui vertici siano numerati da 1 a 5. Supponiamo che da ogni vertice dispari ci si possa spostare in uno pari, con probabilità uniforme; mentre da uno pari ci si può spostare in 1 oppure in 2, con probabilità 1/2.

1. Scrivere la matrice di transizione del sistema.
2. Scrivere la matrice di transizione a due passi.
3. Classificare gli stati del sistema.
4. Determinare la distribuzione invariante del sistema.

Soluzione.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gli stati $\{3, 5\}$ sono transitori, gli altri stati sono ricorrenti positivi (in quanto la catena ha un numero finito di stati). La distribuzione invariante esiste unica ed è data da

$$\pi = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 0 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2 Si calcola che il 10% dei gatti di una regione sia portatore di un virus pericoloso per l'uomo. I gatti vengono sottoposti a un test che presenta un certo margine di insicurezza, nel senso che esso dà reazione positiva sia nel 96% dei gatti portatori sia nel 5% dei gatti sani (non portatori).
Un gatto viene sottoposto al test:

1. Determinare la probabilità di una reazione negativa.
2. Sapendo che la reazione è stata negativa, determinare la probabilità che esso sia, in realtà, portatore.

Soluzione. Si ha

$$\mathbb{P}(T- \mid P) = 0,04 \qquad \mathbb{P}(T- \mid NP) = 0,95 \qquad \mathbb{P}(P) = 0,1$$

da cui

$$\mathbb{P}(T-) = 0,04 \cdot 0,1 + 0,95 \cdot 0,9 = \frac{4 + 855}{1000} = 0,859$$

e quindi

$$\mathbb{P}(P \mid T-) = \frac{\mathbb{P}(T- \mid P)\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(T-)} = \frac{4/1000}{859/1000} = \frac{4}{859} = 0,0047.$$

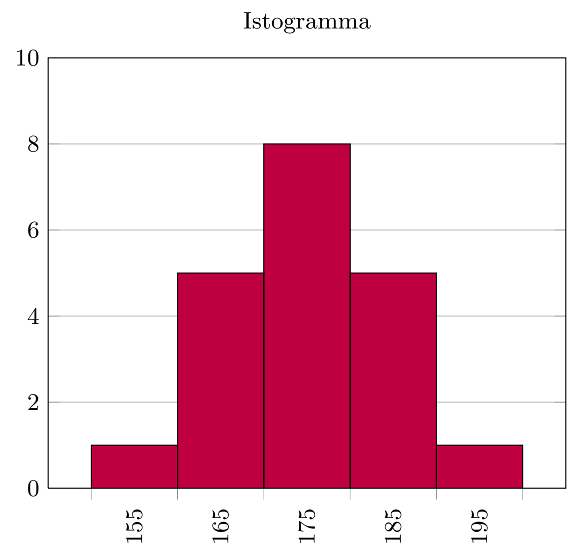
Esercizio 3 I seguenti valori rappresentano l'altezza, in centimetri, di un insieme di atleti:

169	186	178	179	171	161	171	186	185	182
196	167	154	172	178	175	186	170	169	165

Tracciare un istogramma dei dati utilizzando 5 colonne.
Costruire un intervallo di confidenza al 95% per l'altezza media

Soluzione. Utilizziamo per semplicità le classi $[150, 160)$, $[160, 170)$, $\ldots$, $[190, 200)$ che hanno la stessa base; risulta

classe	frequenza	altezza
$[150, 160)$	1	0,1
$[160, 170)$	5	0,5
$[170, 180)$	8	0,8
$[180, 190)$	5	0,5
$[190, 200)$	1	0,1



Si ha $\bar{x} = 175$, $s^2 = 101.37$ e quindi l'intervallo di confidenza risulta

$$\bar{x} \pm t_{0.975}(19)\sqrt{\frac{s^2}{20}} = 175 \pm 4.71$$

Esercizio 4 Si risolvano i seguenti due problemi.

- Ricordare le condizioni di esistenza per la varianza di una variabile aleatoria.
  Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti, aventi media e varianza finita. Mostrare che $Z = XY$ ha varianza finita e calcolarla.

- Ricordare la definizione di distribuzione condizionata per una variabile aleatoria.
  Le lampadine di tipo *ultra* hanno tempo di vita esponenziale di media 1 anno mentre le lampadine di tipo *super* hanno tempo di vita esponenziale di media 2 anni. Peschiamo una lampadina da una riserva che ne contiene in egual misura dei due tipi. Qual è la probabilità che la lampadina duri almeno un anno? Qual è il tempo medio di vita?

Soluzione.

- La varianza di una v.a. è il momento secondo centrato rispetto alla media, ossia $V(X) = \mathbb{E}[(X-\mu)^2]$. Devo comunque verificare le condizioni di esistenza della media; in questo caso, basta verificare che $\mathbb{E}[X^2] < +\infty$.
  Si ha $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ e $\mathbb{E}[Z^2] = \mathbb{E}[X^2Y^2] = \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2] = (V(X)+\mathbb{E}[X]^2)(V(Y)+\mathbb{E}[Y]^2)$ da cui
  $$V(Z) = V(X)V(Y) + \mathbb{E}[X]V(Y) + \mathbb{E}[Y]V(X).$$

- Consideriamo una variabile aleatoria X discreta (il caso continuo sarà analogo). Allora X è descritta dalla sua distribuzione
  $$\{(x_k, p_k)\} \text{ dove } p_k = \mathbb{P}(X = x_k).$$
  Sia E un evento e consideriamo la distribuzione di X condizionata a E: vuol dire considerare la distribuzione di X sotto il nuovo giudizio di probabilità condizionata $\mathbb{P}_E$
  $$p_k^E = \mathbb{P}_E(X = x_k) = \frac{\mathbb{P}(E \cap (X = x_k))}{\mathbb{P}(E)}.$$
  Così ad esempio
  $$\mathbb{E}_E[X] = \sum x_k p_k^E = \frac{1}{\mathbb{P}(E)} \sum_k x_k \mathbb{P}(E \cap (X = x_k)).$$
  Abbiamo due famiglie di lampadine con tempi di vita esponenziali, di parametro λ_U e λ_S, rispettivamente. Sappiamo che $\lambda_U = 1$ e $\lambda_S = \frac{1}{2}$; inoltre, la scelta tra le due è equiprobabile. Indichiamo con T il tempo di vita della lampadina scelta. Si ha
  $$\mathbb{P}(T \le t) = \mathbb{P}(T \le t \mid \text{ultra})\mathbb{P}(\text{ultra}) + \mathbb{P}(T \le t \mid \text{super})\mathbb{P}(\text{super}) = \frac{1}{2}(1 - e^{-\lambda_U t}) + \frac{1}{2}(1 - e^{-\lambda_S t})$$
  quindi
  $$\mathbb{P}(T \ge 1) = \frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-1/2} = 0.4872$$
  e inoltre
  $$\mathbb{E}[T] = \underbrace{\mathbb{E}[T \mid \text{ultra}]}_{=\mathbb{E}[T_U]=\frac{1}{\lambda_U}}\mathbb{P}(\text{ultra}) + \underbrace{\mathbb{E}[T \mid \text{super}]}_{=\mathbb{E}[T_S]=\frac{1}{\lambda_S}}\mathbb{P}(\text{super}) = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}2 = \frac{3}{2}.$$

Esercizio 5 Supponiamo che un certo carattere in una popolazione sia descritto da variabile aleatoria X avente media μ e varianza σ^2 nota.
Si estrae un campione di n individui e si determina una stima puntuale $\hat{\mu}$ per la media.

1. Ricordando la diseguaglianza di Chebyshev, si determini quanto deve essere grande n in modo che la probabilità che la stima si discosti di al più σ dal valore corretto μ sia almeno del 99%.

2. Supponiamo ora che X sia una variabile gaussiana. Si determini quanto deve essere grande n in modo che la probabilità che la stima si discosti di al più σ dal valore corretto μ sia almeno del 99%.

Soluzione. La diseguaglianza di Chebyshev afferma che

$$\mathbb{P}(|X - \mu)| > \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Se $X_1, \ldots, X_n$ rappresentano le osservazioni, allora per lo stimatore $\bar{X} = S_n/n$ si ottiene

$$\mathbb{P}(|\bar{X} - \mu| > \sigma) \leq \frac{\sigma^2/n}{\sigma^2} = \frac{1}{n}$$

quindi perché sia $\mathbb{P}(|\bar{X} - \mu| < \sigma) \geq 0,99$ deve valere

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{100} \qquad \text{ossia } n = 100.$$

Se X ha distribuzione gaussiana, allora $\bar{X}$ ha anche distribuzione gaussiana di parametri μ e σ^2/n, quindi (indichiamo con Z una legge gaussiana standard)

$$0,98 \leq \mathbb{P}(|\bar{X} - \mu| < \sigma) = \mathbb{P}\left(|Z| < \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right) = 2\Phi(\sqrt{n}) - 1$$

il che implica $\Phi(\sqrt{n}) \geq 0.995$ ossia (dalle tavole) $\sqrt{n} \geq 2.58$ e calcolando $(2.58)^2 = 6,6564$ si ottiene che è sufficiente prendere $n = 7$.

Esercizio 6 (Solo 6 CFU) Una scatola contiene 10 monete, di cui 8 equilibrate e 2 truccate in modo che esca T con probabilità $2/3$ e esca C con probabilità $1/3$.
Si estrae una moneta a caso e si lancia 100 volte.

1. Determinare la probabilità che la prima uscita sia T.
2. Sia X il numero di facce T uscite. Determinare la distribuzione di X.
3. Quanto vale la media di X?
4. Determinare la probabilità che la moneta scelta sia equilibrata sapendo di aver ottenuto esattamente 50 T in 100 lanci.

Soluzione. La probabilità che la prima faccia sia T è

$$\mathbb{P}(\text{esce } T) = \frac{1}{2}\frac{8}{10} + \frac{2}{3}\frac{2}{10} = \frac{8}{15};$$

la distribuzione di X è, per $k = 0, \ldots, 100$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{8}{10}\binom{100}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{100-k} + \frac{2}{10}\binom{100}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{100-k}.$$

La media di X vale

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X \mid \text{equilibrata}]\mathbb{P}(\text{equilibrata}) + \mathbb{E}[X \mid \text{truccata}]\mathbb{P}(\text{truccata}) = 100\frac{1}{2}\frac{8}{10} + 100\frac{2}{3}\frac{2}{10} = 53.\bar{3}$$

Infine,

$$\mathbb{P}(\text{la moneta è equilibrata} \mid X = 50) = \frac{4}{4 + \left(\frac{4}{3}\right)^{50}\left(\frac{2}{3}\right)^{50}} = 0,999$$