Prova d'esame

Calcolo delle Probabilità e Statistica (12 crediti)

7 luglio 2015

Esercizio 1 Rispondere alle seguenti domande.

1. Nel portamonete ho due monete da 1 euro, una moneta da 50 centesimi, tre monete da 20 centesimi e due monete da 10 centesimi. Perdo una moneta, ma non so quale. Quanto vale in media il mio portamonete?
2. Lancio un dado (equilibrato, a 6 facce) e quindi lancio una moneta (equilibrata) tante volte quant'è l'esito del lancio. Qual è la probabilità che esca esattamente una volta la faccia testa?
3. Lancio due dadi, equilibrati. Sapendo che la somma è pari, qual è la probabilità che il prodotto sia pari?

Soluzione.

1.

$$\mathbb{E}(\text{Valore portamonete}) = 2,3 \cdot 1/4 + 2,8 \cdot 1/8 + 3,1 \cdot 3/8 + 3,2 \cdot 1/4 = 2,8875$$

2.

$$\mathbb{P}(\text{Esattamente una testa}) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(\text{Esattamente una testa} \mid \text{faccia =i }) = 15/48$$

3. 1/2

Esercizio 2 Supponiamo di avere paura di avere contratto una rara malattia (che capita in media a una persona su 10.000). Facciamo un test, che dà un responso corretto nel 99% dei casi. Qual è la probabilità che il test dia risultato positivo? Sapendo che il test è risultato positivo, qual è la probabilità di essere effettivamente malati?

Soluzione.

$$\mathbb{P}(\text{Test positivo}) = \mathbb{P}(\text{Test positivo} \cap \text{Malato }) + \mathbb{P}(\text{Test positivo} \cap \text{Sano}) =$$

$$0,99 \cdot 0,0001 + 0,01 \cdot 0,9999 = 0,000099 + 0,009999 = 0,010098$$

Usando il Teorema di Bayes:

$$\mathbb{P}(\text{Malato}|\text{Test positivo}) = \frac{\mathbb{P}(\text{Test positivo}|\text{Malato}) \cdot \mathbb{P}(\text{Malato})}{\mathbb{P}(\text{Test positivo})} = \frac{0,99 \cdot 0,0001}{0,010098} = 0,009803922$$

Esercizio 3 In media, impiego 10 minuti per guidare da casa all'università.

1. Supponiamo per semplicità che il tempo necessario, Y, segua una legge esponenziale. Se parto da casa alle 8:45, qual è la probabilità di arrivare in università per le 9?
2. A che ora devo partire per avere una probabilità del 99% di arrivare in tempo?

3. Supponiamo ora che Y abbia densità $f(x) = \frac{1}{25}xe^{-x/5}$. Verificare che f è una funzione densità, che Y ha media 10 minuti e rispondere nuovamente alla prima domanda.

Soluzione. Y segue una legge esponenziale di parametro $\lambda = 1/10$; la probabilità di $(Y < 15)$ è $1 - e^{-15/10} \simeq 77,7\%$. Per arrivare in tempo con una probabilità del 99%, devo trovare qual è quel tempo t per cui $\mathbb{P}(Y \leq t) = 0.99$, ossia

$$(1 - e^{-\lambda t}) = 0.99 \quad \Longrightarrow \quad -\lambda t = \log(.01) \quad \Longrightarrow \quad t = 10\log(100) = 46.0517 \text{ minuti.}$$

Si calcola

$$\int_0^\infty \frac{1}{25}xe^{-x/5}\,\mathrm{d}x = 1, \int_0^\infty \frac{1}{25}x^2e^{-x/5}\,\mathrm{d}x = 10;$$

infine, se Y ora segue questa legge, si ha

$$\mathbb{P}(Y \leq 15) = \int_0^{15} \frac{1}{25}xe^{-x/5}\,\mathrm{d}x = 1 - 4e^{-4} = 0.8008.$$

Esercizio 4 Le seguenti tavole rappresentano le distribuzioni congiunte di due coppie di variabili aleatorie (X, Y) e (S, T).

		X		
		0	1	2
Y	1	.1	.2	.2
	2	.1	.2	.2

		S		
		0	1	2
T	1	.1	.2	.1
	2	.2	.2	.2

1. Le variabili X e Y sono indipendenti?
2. Le variabili S e T sono indipendenti?
3. Quanto vale la media di $X + Y$? E quella di $S + T$?
4. Quanto vale la media di $X \cdot Y$? E quella di $S \cdot T$?

Soluzione. Completiamo le tabelle calcolando le leggi marginali:

		X			
		0	1	2	
Y	1	.1	.2	.2	.5
	2	.1	.2	.2	.5
		0.2	0.4	0.4	

		S			
		0	1	2	
T	1	.1	.2	.1	.4
	2	.2	.2	.2	.6
		0.3	0.4	0.3	

Risulta che nella prima tabella $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j)$ quindi X e Y sono indipendenti, mentre nella seconda $\mathbb{P}(T = 1, S = 0) = .1 \neq .12 = \mathbb{P}(T = 1)\mathbb{P}(S = 0)$ quindi non sono indipendenti. Calcoliamo le medie delle somme: $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y] = 1.2+1.5 = 2.7$; $\mathbb{E}[S+T] = 1.1+1.6 = 2.7$. Passiamo ai prodotti. Dato che X e Y sono indipendenti, vale $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 1.2 \cdot 1.5 = 1.8$; per quanto riguarda ST, osserviamo la sua distribuzione

S T	0	1	2	4
	.3	.2	.3	.2

da cui $\mathbb{E}[ST] = 1.6$.

Esercizio 5 Un sistema si può trovare in uno dei seguenti 4 stati:
Rotto, Fermo, Piano, Veloce

- Se il sistema è R, passa nello stato F con probabilità $1-p$ altrimenti resta in sé;
- se è F, passa nello stato P con probabilità $1-p$ altrimenti si rompe;
- se è P, passa nello stato V con probabilità $1-p$, altrimenti si rompe;
- se è V, resta in sé probabilità $1-p$ altrimenti si rompe.

1. Scrivere la matrice di transizione del sistema e classificare gli stati.
2. Se il sistema oggi è $X_0 = F$, qual è la probabilità che tra 3 giorni sia rotto, ossia $X_3 = R$? e tra 555 giorni?
3. Determinare la distribuzione invariante del sistema.

Soluzione. Il sistema è irriducibile, periodico, quindi regolare; tutti gli stati sono ricorrenti positivi.

$$T = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 & 0 \\ p & 0 & 1-p & 0 \\ p & 0 & 0 & 1-p \\ p & 0 & 0 & 1-p \end{pmatrix}$$

Per ottenere la distribuzione invariante si risolve il sistema

$$\begin{cases} a = p(a+b+c+d) \\ b = (1-p)a \\ c = (1-p)b \\ a+b+c+d = 1 \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\pi = (p,\ p(1-p),\ p(1-p)^2,\ (1-p)^3).$$

Per passare dallo stato F allo stato R in 3 passi, vi sono 4 possibili traiettorie:

$$FPVR,\ FPRR,\ FRFR,\ FRRR$$

e quindi accade con probabilità

$$p(1-p)^2 + p^2(1-p) + p^2(1-p) + p^3 = p$$

Inoltre, dato che $p_{555}(R,F) \simeq \pi(R)$, si ottiene $p_{555}(R,F) \simeq p$.

Esercizio 6 In un incontro al torneo di Wimbledon, un tennista ha servito 15 ace su 81 battute. Indichiamo con p la probabilità che quel tennista ottenga un ace con un servizio.

1. si determini una stima puntuale $\hat{p}$ di p
2. si calcoli un intervallo di confidenza di livello $\alpha = 0,95$ per p, simmetrico rispetto a $\hat{p}$

3. si calcoli un intervallo di confidenza di livello $\alpha = 0,95$ per p del tipo $(0, c)$.

Soluzione. Si ha $\hat{p} = \frac{15}{81} = 0.185$; dalla formula

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{1+\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{1+\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

si ricava $(0.099,\ 0.271)$. Per l'intervallo unilatero si ha

$$p \leq \hat{p} + z_\alpha\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

e dunque $c = 0.257$