1. (6 punti)
Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = \cos x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1\ . \end{cases}$$

Si dica inoltre, motivando la risposta, se la soluzione ha un limite per $x \to +\infty$.

1. (6 punti)
Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = \sin x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \ . \end{cases}$$

Si dica inoltre, motivando la risposta, se la soluzione ha un limite per $x \to +\infty$.

1. (6 punti)
Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \cos x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \ . \end{cases}$$

Si dica inoltre, motivando la risposta, se la soluzione ha un limite per $x \to +\infty$.

1. (6 punti)
Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = \sin x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \ . \end{cases}$$

Si dica inoltre, motivando la risposta, se la soluzione ha un limite per $x \to +\infty$.

1. (6 punti)
Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = \cos x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0\ . \end{cases}$$

Si dica inoltre, motivando la risposta, se la soluzione ha un limite per $x \to +\infty$.

1. (6 punti)
Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = \sin x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \ . \end{cases}$$

Si dica inoltre, motivando la risposta, se la soluzione ha un limite per $x \to +\infty$.

2. (6 punti) Si calcoli il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{xe^{x^2} - \sin x}{x \sin(x^2)} \ .$$

2. (6 punti) Si calcoli il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin x}{\sin x - x \cos x} \ .$$

2. (6 punti) Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \tan x}{\sin x - x e^{x^2}} \ .$$

2. (6 punti) Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \tan x}{x^2 \sin x} \ .$$

2. (6 punti) Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \tan x} \ .$$

2. (6 punti) Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x^2)}{\tan x - xe^{x^2}} \ .$$

3. (6 punti)

Fissato $t \in [0,1]$, siano $A(t)$ l'area della superficie di rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse verticale il grafico della funzione x per $x \in [0,t]$, e $B(t)$ l'area della superficie di rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse verticale il grafico della funzione x^2 per $x \in [0,t]$.

Studiando la funzione $K(t) := A(t) - B(t)$ per $t \in [0,1]$, si dimostri che per certi valori di t si ha $A(t) > B(t)$, mentre per altri si ha $A(t) < B(t)$, e che l'uguaglianza fra le due aree sussiste per un unico valore di $t \in (0,1]$.

In particolare, si determinino il minimo e il massimo di $K(t)$ per $t \in [0,1]$.

3. (6 punti)

Fissato $t \in [0,1]$, siano $A(t)$ l'area della superficie di rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse verticale il grafico della funzione $1-x$ per $x \in [0,t]$, e $B(t)$ l'area della superficie di rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse verticale il grafico della funzione $1-x^2$ per $x \in [0,t]$.

Studiando la funzione $K(t) := A(t) - B(t)$ per $t \in [0,1]$, si dimostri che per certi valori di t si ha $A(t) > B(t)$, mentre per altri si ha $A(t) < B(t)$, e che l'uguaglianza fra le due aree sussiste per un unico valore di $t \in (0,1]$.

In particolare, si determinino il minimo e il massimo di $K(t)$ per $t \in [0,1]$.

3. (6 punti)

Fissato $t \in [0,1]$, siano $A(t)$ l'area della superficie di rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse verticale il grafico della funzione $2x$ per $x \in [0,t]$, e $B(t)$ l'area della superficie di rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse verticale il grafico della funzione $2x^2$ per $x \in [0,t]$.

Studiando la funzione $K(t) := A(t) - B(t)$ per $t \in [0,1]$, si dimostri che per certi valori di t si ha $A(t) > B(t)$, mentre per altri si ha $A(t) < B(t)$, e che l'uguaglianza fra le due aree sussiste per un unico valore di $t \in (0,1]$.

In particolare, si determinino il minimo e il massimo di $K(t)$ per $t \in [0,1]$.

3. (6 punti)

Fissato $t \in [0,1]$, siano $A(t)$ l'area della superficie di rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse verticale il grafico della funzione $2 - 2x$ per $x \in [0,t]$, e $B(t)$ l'area della superficie di rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse verticale il grafico della funzione $2-2x^2$ per $x \in [0,t]$.

Studiando la funzione $K(t) := A(t) - B(t)$ per $t \in [0,1]$, si dimostri che per certi valori di t si ha $A(t) > B(t)$, mentre per altri si ha $A(t) < B(t)$, e che l'uguaglianza fra le due aree sussiste per un unico valore di $t \in (0,1]$.

In particolare, si determinino il minimo e il massimo di $K(t)$ per $t \in [0,1]$.

3. (6 punti)

Fissato $t \in [0,1]$, siano $A(t)$ l'area della superficie di rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse verticale il grafico della funzione $3x$ per $x \in [0,t]$, e $B(t)$ l'area della superficie di rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse verticale il grafico della funzione $3x^2$ per $x \in [0,t]$.

Studiando la funzione $K(t) := A(t) - B(t)$ per $t \in [0,1]$, si dimostri che per certi valori di t si ha $A(t) > B(t)$, mentre per altri si ha $A(t) < B(t)$, e che l'uguaglianza fra le due aree sussiste per un unico valore di $t \in (0,1]$.

In particolare, si determinino il minimo e il massimo di $K(t)$ per $t \in [0,1]$.

3. (6 punti)

Fissato $t \in [0,1]$, siano $A(t)$ l'area della superficie di rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse verticale il grafico della funzione $3-3x$ per $x \in [0,t]$, e $B(t)$ l'area della superficie di rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse verticale il grafico della funzione $3-3x^2$ per $x \in [0,t]$.

Studiando la funzione $K(t) := A(t) - B(t)$ per $t \in [0,1]$, si dimostri che per certi valori di t si ha $A(t) > B(t)$, mentre per altri si ha $A(t) < B(t)$, e che l'uguaglianza fra le due aree sussiste per un unico valore di $t \in (0,1]$.

In particolare, si determinino il minimo e il massimo di $K(t)$ per $t \in [0,1]$.