

1. (7 punti) Calcolate la soluzione del problema di Cauchy (per l'equazione differenziale lineare del primo ordine):

$$\begin{cases} xy' + y - e^x = 0 \\ y(1) = a. \end{cases}$$

Disegnate, approssimativamente, il grafico delle soluzioni per $a = 0$ e per $a = e - 1$.

2. (5 punti) Considerate, per $x \geq 0$, la curva di equazione $y = \sqrt{x}$ e la retta di equazione $y = ax$, con $a \geq 0$. Sia $S(a)$ la regione di piano compresa fra la retta e la curva.

Calcolate il volume $V(a)$ del solido ottenuto facendo ruotare attorno all'asse y la regione $S(a)$.

3. (6 punti) Calcolate

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + x^3) - x^3}{x^6}.$$

Calcolate, in funzione del parametro intero positivo $n \in \mathbf{N}$, il valore del limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + x^3 + x^n) - x^3}{x^6}.$$