**sulla massa invariante**

Consideriamo i due processi per la produzione di antiprotoni

$$e^+ + e^- \rightarrow p + \bar{p} \; , \quad (1)$$
$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p} \; . \quad (2)$$

Per entrambi si calcoli l'energia cinetica di soglia del processo sia nel sistema di centro di massa (realizzato in acceleratori a fasci incrociati), sia nel sistema di laboratorio in cui una delle particelle nello stato iniziale risulta a riposo (fascio di particelle su targhetta fissa).

Se l'urto di due particelle, ognuna di massa $M$ è osservato da un sistema di riferimento in cui l'urto è centrale con quantità di moto uguale ed opposta, diciamo che siamo nel sistema di centro di massa. L'energia totale sia $E_{cm}$. Mostriamo che:

$$s = (p_A + p_B)_\mu (p_A + p_B)^\mu = (p_A + p_B)^2 = E_{cm}^2$$

dove $s$ è invariante per trasformazioni di Lorentz.
Nel CM:

$$\begin{aligned} p_A &= (E_A, c\mathbf{p}) = (\sqrt{c^2\mathbf{p}^2 + M^2c^4}, c\mathbf{p}) \; , \\ p_B &= (E_B, -c\mathbf{p}) = (\sqrt{c^2\mathbf{p}^2 + M^2c^4}, -c\mathbf{p}) \; . \end{aligned}$$

Nel LAB:

$$\begin{aligned} p_A &= (E_A, c\mathbf{p}_A) = (E, \sqrt{E^2 - M^2c^4}) \; , \\ p_B &= (E_B, c\mathbf{p}_B) = (Mc^2, \vec{0}) \; . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s &= (p_A + p_B)_{cm} = (E_A + E_B)^2 - c^2(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B) = (E_A + E_B)^2 \equiv E_{cm}^2 \; , \\ s &= (p_A + p_B)_{LAB} = (E + Mc^2)^2 - (\sqrt{E - M^2c^4})^2 = \\ &= E^2 + 2EMc^2 + M^2c^4 - E^2 + M^2c^4 = 2Mc^2\,(E + Mc^2) \; . \end{aligned}$$

L'invarianza di $s$ implica

$$E_{cm}^2 = 2Mc^2\,(E + Mc^2)$$

ovvero

$$E = \frac{E_{cm}^2}{2Mc^2} - Mc^2 \; . \tag{3}$$

Gli acceleratori a fasci incrociati hanno dunque un enorme vantaggio rispetto a quelli a targhetta fissa (dal punto di vista energetico), raggiungendo un'energia totale nel centro di massa $E_{cm} = \sqrt{s}$ (quali i vantaggi degli acceleratori a targhetta fissa?).

Applichiamo ora quel che abbiamo imparato alle due reazioni (1),(2).
Reazione (1) nel centro di massa.
La sogia è fissata da: $E_{cm} \geq 2M_pc^2$. Siccome $E_{cm} = 2E = 2(T_e + m_ec^2) \geq 2M_pc^2$ le energie cinetiche di soglia dei due leptoni devono essere tali che : $T_e + m_ec^2 = E_{cm}/2 \geq M_pc^2$ ovvero

$$T_{e^-} + T_{e^+} \geq 2\,(M_pc^2 - m_ec^2) \approx 1.9 \times 10^3 \text{ MeV} \; .$$

Nel caso del laboratorio e supponenndo $e^-$ a riposo, si ha dalla (3)

$$E_{e^+} = T_{e^+} + m_ec^2 \geq \frac{(2M_pc^2)^2}{2m_ec^2} - m_ec^2 \; ,$$

ovvero

$$T_{e^+} \geq \frac{(2M_pc^2)^2}{2m_ec^2} - 2m_ec^2 \approx 3.5 \times 10^6 \text{ MeV} \; .$$

Reazione (2) nel centro di massa.
La sogia è fissata da: $E_{cm} \geq 4M_pc^2$. Quindi

$$T_p + T_p \geq (4M_pc^2 - 2M_pc^2) \approx 1.9 \times 10^3 \text{ MeV} \; .$$

Nel caso del laboratorio e supponenndo un protone a riposo, si ha dalla (3)

$$E_p = T_p + M_pc^2 \geq \frac{(4M_pc^2)^2}{2M_pc^2} - M_pc^2 \; ,$$

ovvero

$$T_p \geq 6M_pc^2 \approx 5.7 \times 10^3 \text{ MeV} \; .$$

**sulle variabili di Mandelstam**

Per un processo di diffusione della forma $A\,B \rightarrow C\,D$ ci si aspettano due variabili cinematiche indipendenti quali, ad esempio, l'energia incidente e l'angolo di diffusione. È però possibile (ed anche auspicabile) esprimere le quantità rilevanti per la sezione d'urto come funzioni di variabili che siano invarianti per trasformazioni di Lorentz. Avendo a disposizione i momenti delle quattro particelle, si potrebbero utilizzare, come possibili variabili, i prodotti scalari (invarianti) $p_A \cdot p_B$, $p_A \cdot p_C$ e $p_A \cdot p_D$. Dato che $p_A^2 = (m_A c^2)^2$, $p_B^2 = (m_B c^2)^2$ etc... e $p_A + p_B = p_C + p_D$ per la conservazione dell'energia e della quantità di moto, solo due delle tre variabili sono indipendenti. Invece dei prodotti scalari è comune usare delle variabili (di Mandelstam) collegate:

$$\begin{aligned} s &= (p_A + p_B)^2 \;, \\ t &= (p_A - p_C)^2 \;, \\ u &= (p_A - p_D)^2 \;. \end{aligned}$$

Dimostrare che

$$s + t + u = (m_A c^2)^2 + (m_B c^2)^2 + (m_C c^2)^2 + (m_D c^2)^2$$

Si noti che

$$\begin{aligned} (p_A + p_B)^2 &= p_A^2 + p_B^2 + 2\,p_A \cdot p_B = (m_A c^2)^2 + (m_B^2 c^2)^2 + 2\,p_A \cdot p_B \\ (p_A - p_C)^2 &= p_A^2 + p_C^2 - 2\,p_A \cdot p_C = (m_A c^2)^2 + (m_C^2 c^2)^2 - 2\,p_A \cdot p_C \\ (p_A - p_D)^2 &= p_A^2 + p_D^2 - 2\,p_A \cdot p_D = (m_A c^2)^2 + (m_D^2 c^2)^2 - 2\,p_A \cdot p_D \;; \end{aligned}$$

sommando le tre espressioni si ottiene

$$\begin{aligned} s + t + u &= 3\,(m_A c^2)^2 + (m_B c^2)^2 + (m_C c^2)^2 + (m_D c^2)^2 - 2 p_A \cdot (p_C + p_D) + 2\,p_A \cdot p_B = \\ &= 3\,(m_A c^2)^2 + (m_B c^2)^2 + (m_C c^2)^2 + (m_D c^2)^2 - 2 p_A \cdot (p_A + p_B) + 2\,p_A \cdot p_B = \\ &= 3\,(m_A c^2)^2 + (m_B c^2)^2 + (m_C c^2)^2 + (m_D c^2)^2 - 2 p_A^2 - 2\,p_A \cdot p_B + 2\,p_A \cdot p_B = \\ &= 3\,(m_A c^2)^2 + (m_B c^2)^2 + (m_C c^2)^2 + (m_D c^2)^2 - 2\,(m_A c^2)^2 = \\ &= (m_A c^2)^2 + (m_B c^2)^2 + (m_C c^2)^2 + (m_D c^2)^2 \;. \end{aligned}$$

Prendendo come esempio il processo

$$e^- \, e^+ \rightarrow e^- \, e^+$$

come canale $s$, si utilizzi il sistema di centro di massa per calcolare le variabili di Mandelstam (che risultano in ogni caso invarianti di Lorentz). La quantità di moto dell'elettrone incidente sia $\mathbf{k}_i$ e quella dell'elettrone uscente sia $\mathbf{k}_f$ (i moduli saranno uguali e potremmo scrivere $|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_f| = k$ e $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_f = k^2 \cos\theta$, dove $\theta$ è l'angolo di diffusione nel sistema di centro di massa).
Si verifichi che valgono le relazioni:

$$
\begin{aligned}
s &= 4\,(k^2c^2 + m_e^2c^4)\ , \\
t &= -2k^2c^2\,(1-\cos\theta)\ , \\
u &= -2k^2c^2\,(1+\cos\theta)\ .
\end{aligned}
$$

e si studi l'intervallo di validità delle precedenti variabili.

Si ricorda innanzitutto che le due particelle hanno massa uguale $m_e \approx 9.1 \times 10^{-31}$ Kg, ovvero energia a riposo $m_ec^2 \approx 0.5105$ MeV. Inoltre nel centro di massa le quantità di moto entranti ed uscenti sono nulle. Si ha perciò

$$
\begin{aligned}
p_A &= (E_A, c\mathbf{p}_A) = (\sqrt{\mathbf{k}_i^2c^2 + m_e^2c^4}, c\mathbf{k}_i)\ , \\
p_B &= (E_B, c\mathbf{p}_B) = (\sqrt{\mathbf{k}_i^2c^2 + m_e^2c^4}, -c\mathbf{k}_i)\ , \\
p_C &= (E_C, c\mathbf{p}_C) = (\sqrt{\mathbf{k}_f^2c^2 + m_e^2c^4}, c\mathbf{k}_f)\ , \\
p_D &= (E_D, c\mathbf{p}_D) = (\sqrt{\mathbf{k}_f^2c^2 + m_e^2c^4}, -c\mathbf{k}_f)\ .
\end{aligned}
$$

Calcoliamo le variabili di Mandelstam

$$
\begin{aligned}
s &= (p_A + p_B)^2 = p_A^2 + p_B^2 + 2\,p_A \cdot p_B = \\
&= 2\,m_e^2c^4 + 2\,[E_AE_B - \mathbf{p}_A \cdot \mathbf{p}_B] = \\
&= 2\,m_e^2c^4 + 2\,\left[\left(\sqrt{\mathbf{k}_i^2c^2 + m_e^2c^4}\right)^2 - (c\mathbf{k}_i)\cdot(-c\mathbf{k}_i)\right] = \\
&= 2\,m_e^2c^4 + 2\,[2\,\mathbf{k}_i^2c^2 + m_e^2c^4] = \\
&= 4\,(k^2c^2 + m_e^2c^4)\ .
\end{aligned}
$$

Inoltre

$$
\begin{aligned}
t &= (p_A - p_C)^2 = p_A^2 + p_C^2 - 2\,p_A \cdot p_C = \\
&= 2\,m_e^2c^4 - 2\,[E_A E_C - \mathbf{p}_A \cdot \mathbf{p}_C] = \\
&= 2\,m_e^2c^4 - 2\,\left[\sqrt{\mathbf{k}_i^2c^2 + m_e^2c^4}\sqrt{\mathbf{k}_f^2c^2 + m_e^2c^4} - (c\mathbf{k}_i)\cdot(c\mathbf{k}_f)\right] = \\
&= 2\,m_e^2c^4 - 2\,[k^2c^2 + m_e^2c^4 - k^2c^2\cos\theta] = \\
&= -2\,k^2c^2[1-\cos\theta]\ .
\end{aligned}
$$

Infine

$$
\begin{aligned}
u &= (p_A - p_D)^2 = p_A^2 + p_D^2 - 2\,p_A \cdot p_D = \\
&= 2\,m_e^2c^4 - 2\,[E_A E_D - \mathbf{p}_A \cdot \mathbf{p}_D] = \\
&= 2\,m_e^2c^4 - 2\,\left[\sqrt{\mathbf{k}_i^2c^2 + m_e^2c^4}\sqrt{\mathbf{k}_f^2c^2 + m_e^2c^4} - (c\mathbf{k}_i)\cdot(-c\mathbf{k}_f)\right] = \\
&= 2\,m_e^2c^4 - 2\,[k^2c^2 + m_e^2c^4 + k^2c^2\cos\theta] = \\
&= -2\,k^2c^2[1+\cos\theta]\ .
\end{aligned}
$$

Evidentemente l'intervallo di validità delle variabili di Mandelstam per il processo precedente risulta (essendo $k \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq \pi$)

$$
\begin{aligned}
s &\geq 4\,m_e^2c^4\ , \\
t &\leq 0\ , \\
u &\leq 0\ .
\end{aligned}
$$