sullo spin isotopico

definizioni ed utili relazioni:

$$
\begin{aligned}
\tau^x &= \tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \quad \tau^y = \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ ; \quad \tau^z = \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ ; \\
t^k &= \frac{1}{2}\tau^k \quad (k = 1, 2, 3) \ . \qquad (1)
\end{aligned}
$$

che sono chiamate matrici di Pauli.

$$
\begin{aligned}
|p\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \qquad |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ ; \\
t^z|p\rangle &= \frac{1}{2}\tau^z|p\rangle = +\frac{1}{2}|p\rangle \ ; \qquad t^z|n\rangle = \frac{1}{2}\tau^z|n\rangle = -\frac{1}{2}|n\rangle
\end{aligned}
$$

È facile verificare che, definendo

$$t^{\pm} = t^x \pm i t^y \ ,$$

si ha:

$$
\begin{aligned}
t^+|p\rangle &= t^-|n\rangle = 0 \ , \\
t^+|n\rangle &= |p\rangle \ , \\
t^-|n\rangle &= |p\rangle \ ;
\end{aligned}
$$

e quindi

$$\vec{t}^{\,2} = (t^x)^2 + (t^y)^2 + (t^z)^2 = (t^z)^2 + \frac{1}{2}t^+t^- + \frac{1}{2}t^-t^+ \ .$$

Così si verificano gli autovalori

$$
\begin{aligned}
\vec{t}^{\,2}|p\rangle &= \left[\frac{1}{2}t^+t^- + (t^z)^2\right]|p\rangle = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right]|p\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right)|p\rangle \\
\vec{t}^{\,2}|n\rangle &= \left[\frac{1}{2}t^-t^+ + (t^z)^2\right]|n\rangle = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right]|n\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right)|n\rangle
\end{aligned}
$$

ovvero (con $t = 1/2$)

$$
\begin{aligned}
\vec{t}^{\,2}|p\rangle &= t(t+1)|p\rangle \\
\vec{t}^{\,2}|n\rangle &= t(t+1)|n\rangle \ .
\end{aligned}
$$

Inoltre

$$
\begin{aligned}
(\tau^x)^2 &= (\tau^y)^2 = (\tau^z)^2 = \hat{1} \ , \\
\text{ovvero} & \\
\vec{t}^{\,2} &= \frac{1}{4}\left[(\tau^x)^2 + (\tau^y)^2 + (\tau^z)^2\right] = \frac{3}{4}\hat{1}\,;
\end{aligned}
$$

consistente col calcolo precedente.

L'operatore

$$
\hat{Q} = e\left(\frac{\hat{1}+\tau^z}{2}\right) = \frac{e}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] = e\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

può essere identificato come operatore di carica, infatti gode delle prorietà

$$
\begin{aligned}
\hat{Q}|p\rangle &= e\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e|p\rangle \\
\hat{Q}|n\rangle &= e\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0|n\rangle \ ,
\end{aligned}
$$

estensibile anche a stati di N, neutroni, Z protoni ($A = N + Z$ nucleoni)

$$
\begin{aligned}
\hat{Q}|A\rangle &= \sum_{i=1}^{A} \hat{Q}_i|A\rangle = \sum_{i=1}^{A} e\left(\frac{\hat{1}+\tau_i^z}{2}\right)|A\rangle = \\
&= \sum_{i\in Z} e\left(\frac{\hat{1}+\tau_i^z}{2}\right)|A\rangle + \sum_{i\in N} e\left(\frac{\hat{1}+\tau_i^z}{2}\right)|A\rangle = \\
&= e\,Z|A\rangle \ . \qquad (2)
\end{aligned}
$$

L'operatote $-2\,T^z = -2\,\sum_{i=1}^{A} t_i^z$ conta invece la differenza $(N-Z)$, infatti

$$
-2\,T^z|A\rangle = -2\sum_{i=1}^{A} t_i^z|A\rangle = -2\,\frac{1}{2}\left[-N+Z\right]|A\rangle = (N-Z)|A\rangle \ .
$$

regole di commutazione
Si noti che

$$\begin{aligned}\tau^x \cdot \tau^y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\tau^z \ ,\end{aligned}$$

ed inoltre

$$\begin{aligned}\tau^y \cdot \tau^x &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -i\tau^z \ ,\end{aligned}$$

ovvero il commutatore

$$\left[\tau^x, \tau^y\right] = \tau^x \cdot \tau^y - \tau^y \cdot \tau^x = 2\, i\, \tau^z \ .$$

Una formulazione generale più generale del commutatore è data per mezzo del tensore totalmente antisimmetrico di Ricci $\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}$[1]

$$\left[\tau^\alpha, \tau^\beta\right] = 2\, i\, \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma}\, \tau^\gamma \ . \tag{3}$$

Per due particelle gli stati a $T = 0$ e $T = 1$ (in tutta analogia con gli stati di

[1]

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} +1 \text{ se } \alpha\beta\gamma \text{ è una permutazione pari} \\ -1 \text{ se } \alpha\beta\gamma \text{ è una permutazione dispari} \\ \ \ 0 \text{ se due indici sono uguali} \end{cases} .$$

Ricordiamo che una permutazione è pari se ottenuta dalla disposizione fondamentale [$\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$] attraverso un numero pari di scambi di due indici, dispari se il numero di scambi è dispari. Le sole permutazioni pari sono dunque [123], [312], [231], ovvero quelle ottenute attraverso una rotazione ciclica degli indici a partire dalla fondamentale. Dispari quelle ottenute dalle pari attraverso lo scambio di due indici. Con l'uso di questo tensore il prodotto vettoriale $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ può essere scritto per le singole componenti $C_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A_\beta B_\gamma$ dove si sottintendente una somma sugli indici ripetuti β, γ, ovvero $C_\alpha = \sum_\beta \sum_\gamma \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A_\beta B_\gamma$. Quindi se si vuole trovare (ad esempio) $C_x \equiv C_1$, questo risulta $C_1 = \epsilon_{1\alpha\beta} A_\beta B_\gamma$ ed i soli termini diversi da zero nella somma sono quelli in cui $\beta = 2$ e $\gamma = 3$ o $\beta = 3$ e $\gamma = 2$. Quindi $C_1 = \epsilon_{123} A_2 B_3 + \epsilon_{132} A_3 B_2 = A_y B_z - A_z B_y$, come noto.

spin $S=0$, $S=1$), si scrivono

$$
\begin{array}{ccccc}
T^z & T=1 & T=0 & \hat{Q} \\
 & & & \\
+1 & pp & & +2e \\
 & & & \\
0 & \frac{1}{\sqrt{2}}[|p\rangle|n\rangle + |n\rangle|p\rangle] & \frac{1}{\sqrt{2}}[|p\rangle|n\rangle - |n\rangle|p\rangle] & +e \\
 & & & \\
-1 & |n\rangle|n\rangle & & 0
\end{array}
\tag{4}
$$

Si può verificare ancora una volta la correttezza di questi stati applicando l'operatore di

$$
\begin{aligned}
\vec{T}^{\,2} &= [\vec{t}_1 + \vec{t}_2]^2 = \vec{t}_1^{\;2} + \vec{t}_2^{\;2} + \vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2 + \vec{t}_2 \cdot \vec{t}_1 = \\
&= \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\right) \hat{1} + t_1^z t_2^z + t_2^z t_1^z + t_1^+ t_2^- + t_1^- t_2^+ \ .
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Si ottiene facilmente

$$
\begin{aligned}
\vec{T}^{\,2}|p\rangle|p\rangle &= \left[\frac{3}{2} + 2\left(+\frac{1}{2}\right)\left(+\frac{1}{2}\right) + zero\right] |p\rangle|p\rangle = 2\,|p\rangle|p\rangle \\
\vec{T}^{\,2}|n\rangle|n\rangle &= \left[\frac{3}{2} + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + zero\right] |n\rangle|n\rangle = 2\,|n\rangle|n\rangle
\end{aligned}
$$

mentre

$$
\begin{aligned}
\vec{T}^{\,2}|p\rangle|n\rangle &= \left[\frac{3}{2} + 2\left(+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\right] |p\rangle|n\rangle + |n\rangle|p\rangle = \\
&= |p\rangle|n\rangle + |n\rangle|p\rangle \\
&\text{e} \\
\vec{T}^{\,2}|n\rangle|p\rangle &= \left[\frac{3}{2} + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(+\frac{1}{2}\right)\right] |n\rangle|p\rangle + |p\rangle|n\rangle = \\
&= |n\rangle|p\rangle + |p\rangle|n\rangle \ .
\end{aligned}
$$

Se ne deduce

$$
\begin{aligned}
\vec{T}^{\,2}\left[\frac{|p\rangle|n\rangle + |n\rangle|p\rangle}{\sqrt{2}}\right] &= 2\left[\frac{|p\rangle|n\rangle + |n\rangle|p\rangle}{\sqrt{2}}\right] = 1(1+1)\left[\frac{|p\rangle|n\rangle + |n\rangle|p\rangle}{\sqrt{2}}\right] \ ; \\
&\text{e} \\
\vec{T}^{\,2}\left[\frac{|p\rangle|n\rangle - |n\rangle|p\rangle}{\sqrt{2}}\right] &= 0\left[\frac{|p\rangle|n\rangle - |n\rangle|p\rangle}{\sqrt{2}}\right] = 0(1+0)\left[\frac{|p\rangle|n\rangle - |n\rangle|p\rangle}{\sqrt{2}}\right] \ .
\end{aligned}
$$

Coerente con quanto sintetizzato nella tabella.
Gli stati che si realizzano in natura sono autostati di T^z (cioè hanno una differenza $(N-Z)$ definita, ma anche $\vec{T}^{\,2}$ è ben definito (autostato). Quindi per due nucleoni $|N,N\rangle$, gli stati possibili hanno $T=0$ o $T=1$ con autovalori $T(T+1)$

$$\vec{T}^{\,2}|N,N,T,T^z,\rangle = T(T+1)|N,N,T,T^z,\rangle \ ,$$

uno stato $|p\rangle|n\rangle$ (o $n\rangle|p\rangle$) è una combinazione di stati a $T=0$ e $T=1$:

$$\begin{aligned}
|p\rangle|n\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{|p\rangle|n\rangle+|n\rangle|p\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{|p\rangle|n\rangle-|n\rangle|p\rangle}{\sqrt{2}}\right]= \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[|T=1;T^z=0\rangle+|T=0;T^z=0\rangle\right] \\
|n\rangle|p\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{|p\rangle|n\rangle+|n\rangle|p\rangle}{\sqrt{2}}-\frac{|p\rangle|n\rangle-|n\rangle|p\rangle}{\sqrt{2}}\right]= \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[|T=1;T^z=0\rangle-|T=0;T^z=0\rangle\right] \ . \qquad (6)
\end{aligned}$$

Possiamo dimostrare che un operatore del tipo

$$P^\tau = \frac{1}{2}\left(\hat{1}+\vec{\tau}_1\cdot\vec{\tau}_2\right)$$

produce uno scambio del tipo

$$P^\tau|p\rangle|n\rangle = |n\rangle|p\rangle \ .$$

Come esercizio introduttivo calcoliamo l'azione dell'operatore $\vec{\tau}_1\cdot\vec{\tau}_2$ sugli stati a T^2 definito. A questo scopo basta considerare che (confronta la (5))

$$\vec{T}^{\,2} = (\vec{t}_1+\vec{t}_2)^2 = (\vec{t}_1^{\,2}+\vec{t}_2^{\,2}+2\,\vec{t}_1\cdot\vec{t}_2) = \frac{1}{2}(3+\vec{\tau}_1\cdot\vec{\tau}_2)$$

e si rammenta che $\vec{t}=\vec{\tau}/2$. Perciò

$$\begin{aligned}
\vec{\tau}_1\cdot\vec{\tau}_2|T,T^z\rangle &= (2\vec{T}^{\,2}-3)|T,T^z\rangle = (2\,T(T+1)-3)|T,T^z\rangle \rightarrow \\
&\rightarrow -3|T=0,T^z=0\rangle \\
&\rightarrow +1|T=1,T^z\rangle \ . \qquad (7)
\end{aligned}$$

E quindi:

$$
\begin{aligned}
P^\tau|T,T^2\rangle &= \frac{1}{2}\left[1+\vec{\tau}_1\cdot\vec{\tau}_2\right]|T,T^z\rangle = \frac{1}{2}\left[1+(2\vec{T}^{\,2}-3)\right]|T,T^z\rangle = \\
&= \frac{1}{2}\left[1+(2\,T(T+1)-3)\right]|T,T^z\rangle = \left[T(T+1)-1\right]|T,T^z\rangle \rightarrow \\
&\rightarrow -1|T=0,T^z=0\rangle \\
&\rightarrow +1|T=1,T^z\rangle\ .
\end{aligned} \tag{8}
$$

Se ora applichiamo l'operatotre P^τ alla combinazione di stati che forma le coppie $|p\rangle|n\rangle$ e $|n\rangle|p\rangle$ (confronta equazione(6)), otteniamo

$$
\begin{aligned}
P^\tau\,|p\rangle|n\rangle &= P^\tau\,\frac{\sqrt{2}}{2}\left[|T=1;T^z=0\rangle+|T=0;T^z=0\rangle\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[+1\,|T=1;T^z=0\rangle-1\,|T=0;T^z=0\rangle\right] = \\
&= |n\rangle|p\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P^\tau\,|n\rangle|p\rangle &= P^\tau\,\frac{\sqrt{2}}{2}\left[|T=1;T^z=0\rangle-|T=0;T^z=0\rangle\right]\ . \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[+1\,|T=1;T^z=0\rangle-(-1)\,|T=0;T^z=0\rangle\right] = \\
&= |p\rangle|n\rangle\ .
\end{aligned} \tag{9}
$$

L'opratore P^τ ha la proprietà di scambiare le coppie di due nucleoni ed è detto operatore di scambio. Evidentemente le coppie $|n\rangle|n\rangle$ e $|p\rangle|p\rangle$ sono autostati di P^τ (con autovalore $+1$) essendo entrambe coppie a $T=1$.

Tutta la stessa geometria può essere trasferita nella descrizione di stati di spin nella formale analogia $|n\rangle \equiv |\downarrow\rangle = |s=1/2, s^z=-1/2\rangle$; $|p\rangle \equiv |\uparrow\rangle = |s=1/2, s^z=+1/2\rangle$, e così via... In particolare vale una tabella analoga alla (4), ovvero

$$
\begin{array}{ccc}
S^z & S=1 & S=0 \\
 & & \\
+1 & \uparrow\uparrow & \\
 & & \\
0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle+|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle\right] & \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle-|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle\right] \\
 & & \\
-1 & |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle & .
\end{array} \tag{10}
$$

Etc...

nel potenziale $N - N$
L'unico stato legato di due nucleoni presente in natura è lo stato $n, p\rangle$ a $T = 0$ (deuterio). Lo stato ha $T = 0$, $S = 1$, $L = 0$, in modo che $(-1)^{L+S+T} = -1$ per rispettare il principio di Pauli generalizzato (i nucleoni sono (entro circa l'1%) particelle identiche a spin 1/2, ovvero sono fermioni...). L'interazione dipende dallo spin totale dei due nucleoni (è attrattiva per stati di tripletto visto che il deuterio ha spin totale $S = 1$, ma non attrattiva in $S = 0$). Che tipo di interazione può cambiare segno in queste condizioni di spin?
Dimostriamo che tale ruolo può essere affidato ad un'interazione dl tipo

$$V^{\text{spin}}(r) = V^s(r)\,\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \ ,$$

dove le matrici di Pauli (1) sono indicate con $\vec{\sigma}$ per lo spin e non $\vec{\tau}$.

La dimostrazione si poggia su quanto già mostrato per le matrici di Pauli nello spazio dell'isospin, ovvero il risultato (7). Evidentemente il potenziale dell'equazione precedente avrà la proprietà

$$\begin{aligned} \langle S=0, S^z|V^{\text{spin}}|S=0, S^z\rangle &= -3\,\langle S=0, S^z|V^s(r)|S=0, S^z\rangle \\ \langle S=1, S^z|V^{\text{spin}}|S=1, S^z\rangle &= +1\,\langle S=1, S^z|V^s(r)|S=1, S^z\rangle \end{aligned}$$

divenendo così attrattivo e repulsivo nei due stati di spin.

La fenomenologia della diffusione di neutroni-protoni, mostra che la sezione d'urto ha una forte componente dovuta allo scambio di protoni e neutroni, e quindi la presenza di termini del tipo

$$V^{\text{isospin}}(r) = V^\tau(r)\,P^\tau = \frac{1}{2}\,V^\tau(r) + \frac{1}{2}\,V^\tau\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \ .$$