sulla scoperta del neutrone

Quando particelle alfa provenienti dal decadimento del $^{210}_{84}\mathrm{Po}$ (quindi aventi energia cinetica di 5.30 MeV) furono fatte incidere su di una targhetta di $^{9}_{4}\mathrm{Be}$, si scoprì che nella cattura della particella alfa veniva prodotta una radiazione avente carica nulla. Assumendo che la radiazione sia dovuta a raggi γ, calcolare l'energia di tali raggi nel caso che vengano emessi in avanti.

Si assume come reazione: $\alpha+^{9}_{4}\mathrm{Be}\rightarrow\ ^{13}_{6}\mathrm{C}+\gamma$, ovvero $^{9}_{4}\mathrm{Be}\,(\alpha,\gamma)\,^{13}_{6}\mathrm{C}$ e che il nucleo di Berillio sia in quiete. Dalla conservazione dell'energia si ha:

$$\begin{aligned}
&(M_{\mathrm{Be}}+M_\alpha)c^2+T_\alpha = M_{\mathrm{C}}c^2+T_{\mathrm{C}}+T_\gamma \\
&(9.0121821+4.0026032)\,\mathrm{uma}\,(931.49)\,\mathrm{MeV/uma}+5.30\,\mathrm{MeV} = \\
&=(13.0033548)\,\mathrm{uma}\,(931.49)\,\mathrm{MeV/uma}+T_{\mathrm{C}}+T_\gamma \\
&T_\gamma+T_{\mathrm{C}} = 15.9\ \mathrm{MeV}\ . \qquad (1)
\end{aligned}$$

(I valori delle masse atomiche sono dal sito http://atom.kaeri.re.kr/ton/index.html, come mai le assumiamo uguali al valore delle masse nucleari?)
Nel caso di diffusione in avanti per la conservazione della quantità di moto si ha:

$$p_\alpha = p_\gamma + p_{\mathrm{C}} \qquad \text{ovvero} \qquad p_\alpha c = p_\gamma c + p_{\mathrm{C}} c\,. \qquad (2)$$

In approssimazione non relativistica

$$T=\frac{p^2}{2M}=\frac{(pc)^2}{2Mc^2} \quad\rightarrow\quad pc=\sqrt{2(Mc^2)T}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
p_\alpha c &= \sqrt{2\cdot(4\,\mathrm{uma})\,931.5\ \mathrm{MeV/uma}\cdot 5.30}\approx 198.8\ \mathrm{MeV} \\
p_{\mathrm{C}} c &= \sqrt{2\cdot(13\,\mathrm{uma})\,931.49\ \mathrm{MeV/uma}\cdot T_{\mathrm{C}}}\approx 155.6\,T_{\mathrm{C}}^{1/2}\ \mathrm{MeV}
\end{aligned}$$

mentre per i fotoni γ vale $E_\gamma = T_\gamma = p_\gamma c$. Sostituendo nella (2)

$$198.8\,\mathrm{MeV} = T_\gamma + 155.6\,T_{\mathrm{C}}^{1/2} \qquad (3)$$

e risolvendo simultaneamente (1) e (3) si ottiene

$$T_\gamma \approx 14.5\,\mathrm{MeV} \qquad T_{\mathrm{C}}\approx 1.4\,\mathrm{MeV}\ .$$

La stessa radiazione viene poi fatta incidere in due nuovi esperimenti, prima su paraffina (ricca di protoni) e poi su di una targhetta di azoto ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$. Sempre assumendo di avere a che fare con fotoni, determinare l'energia minima del fotone in grado di produrre (per diffusione Compton) protoni di rinculo di 5.7 MeV e nuclei di azoto di rinculo di 1.4 MeV come **osservati** nei due esperimenti.

Il minimo di energia sarà per un urto centrale. Si può continuare ad usare una cinematica non relastivistica dato che $T \ll Mc^2$ per tutte le masse in gioco.
Si ha

$$\begin{aligned}(h\nu)_{\min} &= h\nu' + T \quad (\text{conservazione dell'energia})\\ \frac{(h\nu)_{\min}}{c} &= -\frac{h\nu'}{c} + MV \quad (\text{conservazione della quantità di moto})\,.\end{aligned}$$

Moltiplicando la seconda equazione per c e sommandola alla prima, si ottiene (si noti che $MVc = \sqrt{2Mc^2\,T}$)

$$2(h\nu)_{\min} = \sqrt{2Mc^2T} + T = \sqrt{T}\left(\sqrt{2Mc^2} + \sqrt{T}\right) \approx \sqrt{T}\sqrt{2Mc^2}$$

dato che $2Mc^2 \gg T$. In conclusione

$$(h\nu)_{\min} \approx \sqrt{\frac{Mc^2\,T}{2}}\,.$$

Per il protone, quindi

$$(h\nu)_{\min} \approx \sqrt{(5.7\,\mathrm{MeV}\cdot 938.3\,\mathrm{MeV})/2} \approx 52\ \mathrm{MeV}\,;$$

per la targhetta di azoto ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$

$$(h\nu)_{\min} \approx \sqrt{(1.4\,\mathrm{MeV}\cdot(14\,\mathrm{uma}\times 931.5\,\mathrm{MeV/uma}))/2} \approx 96\ \mathrm{MeV}\,.$$

Entrambe le energie sono molto più grandi di quella precedentemente stimata. **L'assunzione che la radiazione osservata sia dovuta a raggi gamma è, quindi, inconsistente**.

Si provi ora ad assumere che i protoni e l'azoto di rinculo siano prodotti da urti (centrali) con particelle dotate di massa. Se ne stimi la massa e la sua energia cinetica iniziale.

Sia m la massa del proiettile ed M la massa della targhetta, valgono

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV^2 \\ mv &= mv' + MV \end{aligned}$$

da cui

$$V = \frac{2m}{m+M}\, v$$

e l'energia cinetica finale della targhetta in funzione dell'energia cinetica iniziale del proiettile, vale

$$T_{\text{target}} = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}M\,\left[\frac{2mv}{m+M}\right]^2 = \frac{4mM}{(m+M)^2}T_{\text{proiettile}}\,.$$

In definitiva le equazioni da risolvere sono

$$\begin{aligned} 5.7\ \text{MeV} &= \frac{4m\cdot(1.0\,\text{uma})}{(m+1.0\,\text{uma})^2}\,T_{\text{proiettile}} \quad \text{per protoni;} \\ 1.4\ \text{MeV} &= \frac{4m\cdot(14.0\,\text{uma})}{(m+14.0\,\text{uma})^2}\,T_{\text{proiettile}} \quad \text{per l'azoto.} \end{aligned}$$

Soluzione

$$m \approx 0.98\ \text{uma}\,, \quad T_{\text{proiettile}} \approx 5.7\ \text{MeV}.$$

La massa non è lontana dal valore noto ai giorno d'oggi (≈ 1.007 uma).

da fare a casa: verificare che se la reazione iniziale col berillio, assunta erroneamente essere ${}^{9}_{4}\text{Be}\,(\alpha,\gamma)\,{}^{13}_{6}\text{C}$, venisse invece corretta in ${}^{9}_{4}\text{Be}\,(\alpha,n)\,{}^{12}_{6}\text{C}$ come nella realtà, l'energia cinetica del neutrone finale risulterebbe $T_n \approx 5.7$ MeV ($\equiv T_{\text{proiettile}}$) come già ricavato.