Esercizi

sulla notazione complessa

1.

La notazione complessa fornisce un semplice ed efficace strumento per calcolare la media temporale[1] di un prodotto. Sia, ad esempio, $f(\mathbf{r},t) = A\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \delta_a)$ e $g(\mathbf{r},t) = B\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \delta_b)$. Lo studente è invitato a verificare che:

$$\langle f \cdot g \rangle = \frac{1}{2}\Re(\tilde{f} \cdot \tilde{g}^*) \; ,$$

dove f e g devono avere lo stesso $\mathbf{k}$ e la stessa ω, ma non necessariamente la stessa ampiezza e la stessa costante di fase.
(Si ricorda che $\tilde{f}(\mathbf{r},t) = \tilde{A}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ e $\tilde{g}(\mathbf{r},t) = \tilde{B}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$, con $\tilde{A} = Ae^{i\delta_a}$, $\tilde{B} = Be^{i\delta_b}$).
Si può dunque dimostrare che (ad esempio)

$$\langle u \rangle = \frac{1}{4}\Re\left(\epsilon_0 \tilde{\mathbf{E}}\cdot\tilde{\mathbf{E}}^* + \frac{1}{\mu_0}\tilde{\mathbf{B}}\cdot\tilde{\mathbf{B}}^*\right) \quad \text{e che} \quad \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2}\Re\left(\tilde{\mathbf{E}}\times\tilde{\mathbf{B}}^*\right) \; .$$

nb: abbiamo distinto tra f and $\tilde{f}$, E ed $\tilde{\mathbf{E}}$, etc..., per ragioni di chiarezza didattica, nella maggior parte dei casi questa distinzione non sarà così esplicita. Dato che la notazione complessa è la notazione sempre utilizzata, si dovrà sottoindendere che solo la parte reale risulterà rilevante ai fini dei risultati fisici.

[1] Si definisce $\langle f \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$, ad esempio:
$\langle \cos^2(kx - \omega t + \delta) = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(kx-\omega t+\delta)\,dt = 1/2$.