Modello di Drude per la conducibilità e propagazione delle onde elettromagnetiche nei conduttori

1 Conducibilità

Un buon conduttore è caratterizzato da alti valori della conducibilità , da ricondursi alla presenza di un certo numero di elettroni liberi per unità di volume ($\bar{N}$) all'interno dello stesso conduttore. Chiameremo σ tale conducibilità (parametro macroscopico). Vale la legge di Ohm (per campi elettrici non troppo intensi):

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \tag{1}$$

Table 1: I valori di σ (in condizioni ambienti di temperatura, 20^0 C) per il rame e l'argento, insieme ad altri parametri (vedi testo).

	σ $[10^7 \cdot (\Omega \cdot m)^{-1}]$	ρ (Kg/m^3)	μ (u.m.a.)	$\bar{N}$ $[10^{28}/\text{m}^3]$	τ $[10^{-14}$ sec$]$	ω_p [sec^{-1}]
Rame	5.96	8920	63.546	8.45	2.48	$1.65 \cdot 10^{16}$
Argento	6.30	10490	107.87	5.86	3.77	$1.37 \cdot 10^{16}$

$$\bar{N}_{Cu} = N_A \frac{\rho_{Cu}}{\mu_{Cu}} \approx ; \quad \bar{N}_{Ag} = N_A \frac{\rho_{Ag}}{\mu_{Ag}} \approx ,$$

dove ρ è la densità di massa e μ il peso atomico. Si ipotizza un unico elettrone libero per atomo, cioè $\bar{N} \equiv$ numero di atomi per m^3.

Il moto dell'elettrone libero nel metallo è determinato dalla presenza del campo elettrico e dalla forza viscosa dovuta agli urti col reticolo

$$m_e \ddot{\mathbf{r}} = -m_e \bar{\gamma}\, \dot{\mathbf{r}} + q_e \mathbf{E}\,. \tag{2}$$

La soluzione asintotica per la velocità di deriva dell'elettrone in condizioni stazionarie ($\ddot{\mathbf{r}} = 0$), diventa

$$\mathbf{v}_{deriva} = \dot{\mathbf{r}}_{asintotica} = \frac{q_e}{m_e \bar{\gamma}}\, \mathbf{E}$$

e la densità di corrente

$$\mathbf{j} = \bar{N} q_e \mathbf{v}_{deriva} = \frac{\bar{N} q_e^2}{m_e \bar{\gamma}} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E},$$

che determina una relazione tra la quantità macroscopica σ ed i parametri microscopici del modello ($\bar{\gamma}$) che possono così essere determinati. Ovvero

$$\tau = \frac{1}{\bar{\gamma}} = \left[\frac{\bar{N} q_e^2}{m_e \sigma} \right]^{-1} .$$

[vedi Tabella (1)].

2 Onde

Un campo elettrico che interessasse l'intero conduttore e del tipo

$$\mathbf{E} = \hat{z} E = \hat{z} E_0 e^{-i\omega t}$$

provoca un moto (stazionario) dell'elettrone che (in base alla (2))

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t} = \frac{q_e}{m_e} \frac{1}{-\omega^2 - i\bar{\gamma}\omega} e^{-i\omega t} = \frac{q_e}{m_e \bar{\gamma}} \frac{1}{i\omega(i\omega\tau - 1)} e^{-i\omega t} ,$$

ovvero il moto equivalente a quello di un elettrone legato (formalmente) in cui $\omega_0 = 0$ (elettrone libero). se ne deduce che l'equazione per l'indice di rifrazione che ne risulta diviene

$$n^2(\omega) - 1 = \frac{\bar{N} q_e^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{1}{-\omega^2 - i\bar{\gamma}\omega} = \frac{\bar{N} q_e^2}{\epsilon_0 m_e \bar{\gamma}} \frac{1}{i\omega(i\omega\tau - 1)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{1}{i\omega(i\omega\tau - 1)}$$

che ammette i seguenti limiti

$$\omega\tau \ll 1 \qquad n^2 \approx 1 + i \frac{\bar{N} q_e^2}{\epsilon_0 m_e \bar{\gamma}} \frac{1}{\omega} = 1 + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \tag{3}$$

$$\omega\tau \gg 1 \qquad n^2 \approx 1 - \frac{\bar{N} q_e^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} , \tag{4}$$

dove $\omega_p = \sqrt{\frac{\bar{N} q_e^2}{\epsilon_0 m_e}}$ è la pulsazione di plasma e dipende direttamente da $\bar{N}$[1]

[1] Se, localmente, in un plasma neutro in cui ci sono $\bar{N}$ elettroni liberi, si stabilisce una fluttuazione di densità di carica $\delta\varrho$ che si sposta di una quantità $\delta\mathbf{r}$ e disposta su di

2.1 limite $\omega\tau \ll 1$

In questo caso, abbiamo (vedi eq.(3))[2]

$$
\begin{aligned}
n = \sqrt{n^2} &= n_R(\omega) + i n_I(\omega) \\
&= \sqrt{\frac{\sigma}{2\epsilon_0\omega}}\,(1+i)\ ,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

con un eguale (e largo) contributo reale ed immaginario. Avremo:

$$
\begin{aligned}
k_{R,I}(\omega) &= \frac{\omega}{c} n_{R,I}(\omega) \\
&= \sqrt{\frac{\sigma\omega}{2\epsilon_0 c^2}}\,,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

e l'attenuazione dell'onda (nell'a direzione di propagazione, assunta y), risulta

$$
e^{-k_I y} = e^{-y/\delta},\,,
$$

con

$$
\delta(\text{metri}) \approx \sqrt{\frac{0.028\,(\text{m}^2\cdot\text{sec}^{-1})}{\omega\,(\text{rad/sec})}}
$$

nel caso del rame.

2.2 limite $\omega\tau \gg 1$

Dalla (4),

$$
n^2 \approx 1 - \frac{\bar{N} q_e^2}{\epsilon_0 m_e}\frac{1}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}
$$

con due successivi casi limite:

---

una superficie $\delta\mathbf{S} = \delta S\hat{\mathbf{r}}$, si crea un campo elettrico $\mathbf{E} = \frac{\sigma_{carica}}{\epsilon_0}\hat{\mathbf{r}} = \frac{\bar{N}|q_e|}{\epsilon_0}\delta\mathbf{r}$. Sul singolo elettrone risulta una forza elastica: $\mathbf{F}_e = -|q_e|\mathbf{E} = -\frac{\bar{N}q_e^2}{\epsilon_0}\delta\mathbf{r}$ la cui pulsazione diventa $\omega_p^2 = \frac{\bar{N}q_e^2}{\epsilon_0 m_e}$.

[2] Osserviamo (confronta eq.(3)) che $\sqrt{1+ib} = \sqrt{(1+b^2)^{1/2}e^{i\pi/2}} = (1+b^2)^{1/4}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4) = (1+b^2)^{1/4}(1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2})$.

i) $\omega < \omega_p$ e quindi $n^2 < 1$, ovvero

$$n \equiv i n_I = i\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}\,,$$

e le onde relative sono immediatamente attenuate e quindi riflesse ...

ii) $\omega > \omega_p$ e quindi n^2 reale e < 1, ovvero

$$n \equiv i n_R = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\,,$$

e le onde relative attraverso il plasma che risulta trasparente. La ionosfera è un esempio efficace di queste condizioni, In questo caso $\bar{N} \approx 10^{12}$ elettroni/m^3 (molto variabile, giorno e notte...) e $\nu_p = \omega_p/(2\pi) \approx 9 \cdot 10^6$ Hz. Le onde sotto questa frequenza vengono riflesse permettendo le trasmissioni per mezzo di onde lunghe e medie (cosiddette). Lo stesso telegrafo senza fili di Marconi funzionò per questa "strana" ragione anche per distanze transoceaniche.

Table 2: Valori teorici (λ_p) e sperimentali (λ_{exp}) delle lunghezze d'onda di plasma per diversi metalli.

metallo	$\lambda_{\rm exp}$ (Å)	$\lambda_p = 2\pi c/\omega_p$ (Å)
Li	1550	1550
Na	2100	2090
K	3150	2870
Rb	3400	3220