Dispersione di un pacchetto a profilo gaussiano

Per illustrare il concetto di velocità di gruppo edi mezo dispersivo, consideriamo un modello specifico per la dipendenza della pulsazione dal numero d'onda nel mezzo e studiamo la propagazione di un impulso in tale mezzo. Consideriamo un pacchetto d'onda (in una dimensione per semplicità)

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\; a(k)\, e^{i(kx-\omega(k)t)} \;, \tag{1}$$

dove ω, ricordiamolo, è una funzione di k, $\omega(k)$. Supponiamo anche che il gruppo sia concentrato intorno a $k = k_0$ potremo scrivere:

$$\begin{aligned} k &= k_0 + k_1 = k_0 + (k - k_0) \;, \\ \omega(k) &= \omega(k_0) + \omega_1(k_1) = \omega_0 + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} (k - k_0) + ... \\ a(k) &= a(k_0 + k_1) = b(k_1) \end{aligned} \tag{2}$$

troncando lo sviluppo al primo ordine nell'ipotesi che $k_1 = k - k_0 \ll k_0$, perché il pacchetto è stato supposto concentrato intorno a k_0. Ne risulta

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1\, b(k_1)\, e^{i(k_0x-\omega_0 t)}\, e^{i(k_1x-\omega_1(k_1)t)} = \\ &= \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1\, b(k_1)\, e^{i(k_1x-\omega_1(k_1)t)}\right]}\, e^{i(k_0x-\omega_0 t)} = \qquad (3) \\ &= \mathcal{A}(x,t)\, e^{i(k_0x-\omega_0 t)} \;. \qquad (4) \end{aligned}$$

Il termine $\underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1\, b(k_1)\, e^{i(k_1x-\omega_1(k_1)t)}\right]} = \mathcal{A}(x,t)$ rappresenta un ampiezza, che (a causa dell'ipotesi $\omega_1(k_1) \ll \omega_0$) varia molto lentamente rispetto a ω_0 e quindi all'onda di cui è ampiezza.

Prendiamo un pacchetto modulato in forma gaussiana al tempo $t = 0$

$$u(x,0) = e^{-\frac{x^2}{2L^2}}\, \cos k_0 x = \frac{1}{2}\, e^{-\frac{x^2}{2L^2}} \left[e^{ik_0x} + e^{-ik_0x}\right] \tag{5}$$

e, per semplicità sia,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{6}$$

In pratica questo vuol dire che, immediatamente prima $t = 0$, l'onda consiste di due impulsi, entrambi in moto verso l'origine, in modo tale che essi si sommano a $t = 0$ nella forma (5) (si veda la discussione in nota[1]).
Negli istanti successivi i due impulsi riemergono e la distribuzione iniziale (5) si splitterà in due impulsi identici che si muovono in senso opposto[2].
Ne segue

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ikx}\, \frac{1}{2}\, e^{-\frac{x^2}{2L^2}} \left[e^{ik_0x} + e^{-ik_0x}\right] = \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[e^{-\frac{x^2}{2L^2} - i(k-k_0)x} + e^{-\frac{x^2}{2L^2} - i(k+k_0)x}\right] . \end{aligned} \tag{8}$$

Utilizzando gli integrali di Gauss ($\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ax^2+bx} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2} e^{+\frac{b^2}{4a}} = e^{+\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, e^{-a\xi^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\, e^{+\frac{b^2}{4a}} , \tag{9}$$

con $a = 1/(2L^2)$ e $b = -i(k-k_0)$ e $b = -i(k+k_0)$. In conclusione

$$a(k) = \frac{L}{2}\left[e^{-(L^2/2)\,(k-k_0)^2} + e^{-(L^2/2)\,(k+k_0)^2}\right] = \frac{L}{2}\left[e^{-(L^2/2)\,(k-k_0)^2} + (k_0 \to -k_0)\right] . \tag{10}$$

Osservazioni: i) la trasformata di Fourier di una forma gaussiana è ancora una forma gaussiana; ii) $a(k) = a(-k)$, riflette la presenza di due impulsi che si allontanano dall'origine.

Per calcolare la forma d'onda occorre specificare la funzione $\omega(k)$. Per un calcolo analitico (che mostra gli effetti essenziali della dispersione), si assuma

$$\omega(k) = \bar{\omega}\left(1 + \frac{a^2k^2}{2}\right) , \tag{11}$$

[1] Il problema delle condizioni iniziali per la funzione d'onda, richiede i valori iniziali per $u(x,0)$ e $\partial u(x,0)/\partial t$. Prendendo la parte reale della (1) si può dimostrare che $a(k)$ in termini dei valori iniziali è

$$a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ikx} \left[u(x,0) + \frac{i}{\omega(k)}\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\right] . \tag{7}$$

[2] Nel nostro caso la soluzione

$$u(x, t \le 0) = \frac{1}{2}\, e^{-\frac{x^2}{2L^2}} \left[\cos(k_0x - \omega_0 t) + \cos(k_0 x + \omega_0 t)\right]$$

rispetta la condizione al contorno (6).

dove $\bar{\omega}$ è costante ed a rappresenta una lunghezza tipica a cui gli effetti dispersivi divengono importanti (la (11) è un'approssimazione della relazione di dispersione in un plasma tenue). Il calcolo esplicito dalle (1),(10) e (11)

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\; a(k)\, e^{i(kx-\omega(k)t)} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{L}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\; e^{ikx}\, e^{-i\bar{\omega}\left(1+\frac{a^2k^2}{2}\right)t} \left[e^{-(L^2/2)\,(k-k_0)^2} + (k_0 \to -k_0)\right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{L}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1\; e^{ik_1x}\, e^{ik_0x}\, e^{-i\bar{\omega}\left(1+\frac{a^2k_0^2}{2}\right)t}\, e^{-i\bar{\omega}\frac{a^2k_1^2}{2}t}\, e^{-i\bar{\omega}a^2k_1k_0t} \times \\
&\qquad\qquad \times \left[e^{-(L^2/2)\,k_1^2} + (k_0 \to -k_0)\right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1\; \underbrace{\left[\frac{L}{2}\, e^{-\frac{L^2}{2}k_1^2}\, e^{-i\bar{\omega}\frac{a^2}{2}k_1^2t}\right]}_{b(k_1)} \times \underbrace{\left[e^{ik_1x}\, e^{-i\bar{\omega}\frac{a^2}{2}k_1k_0t}\right]}_{e^{i(k_1x-\omega_1(k_1)t)}} \times \\
&\qquad\qquad \times \underbrace{\left[e^{ik_0x}\, e^{-i\bar{\omega}(1+\frac{a^2k_0^2}{2}t)}\right]}_{e^{i(k_0x-\omega_0t)}} + (k_0 \to -k_0) = \qquad (12) \\
&= \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{L}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1\; e^{-k_1^2\left[\frac{L^2}{2}+i\bar{\omega}\frac{a^2}{2}t\right]}\; e^{ik_1\left[x-\bar{\omega}\frac{a^2}{2}k_0t\right]}\right\} \underbrace{e^{ik_0x}\, e^{-i\bar{\omega}(1+\frac{a^2k_0^2}{2}t)}}_{e^{i(k_0x-\omega_0t)}} + \\
&\qquad\qquad + (k_0 \to -k_0) = \\
&= \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{L}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1\; e^{-k_1^2\,A}\; e^{ik_1\,B}\right\} e^{i(k_0x-\omega_0t)} + (k_0 \to -k_0) = \\
&= \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{L}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1\; e^{-A\left(k_1-\frac{iB}{2A}\right)^2}\; e^{-\frac{B^2}{4A}}\right\} e^{i(k_0x-\omega_0t)} + (k_0 \to -k_0) = \\
&= \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{L}{2}\, \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{A}}\; e^{-\frac{B^2}{4A}}\right\} e^{i(k_0x-\omega_0t)} + (k_0 \to -k_0) \\
&= \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{L}{2}\, \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{L}{\sqrt{2}}\left[1+i\frac{\bar{\omega}a^2t}{L^2}\right]^{1/2}}\; e^{-\frac{\left[x-\bar{\omega}a^2k_0t\right]^2}{2L^2\left(1+i\frac{\bar{\omega}a^2t}{L^2}\right)}}\right\} e^{i(k_0x-\omega_0t)} + (k_0 \to -k_0) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{ \frac{1}{2} \, \frac{e^{-\frac{\left[x-\bar{\omega}a^2k_0t\right]^2}{2L^2\left(1+i\frac{\bar{\omega}a^2t}{L^2}\right)}}}{\left[1+i\frac{\bar{\omega}a^2t}{L^2}\right]^{1/2}} \right\} e^{i(k_0x-\omega_0t)} + (k_0 \to -k_0) = \\
&= \mathcal{A}(x,t)\; e^{i(k_0x-\omega_0t)} + (k_0 \to -k_0) \;, \qquad (13)
\end{aligned}
$$

due pacchetti che si propagano in direzioni opposte come atteso.
Si noti la corrispondenza tra le espressioni (3) e (12 e le espressioni (4) e (13). In partcolare si noti che nella (13) l'ampiezza $\mathcal{A}(x,t)$ assume una forma gaussiana, ma con una larghezza

$$
L(t) = \left[L^2 + \left(\frac{\bar{\omega}a^2t}{L}\right)^2\right]^{1/2} \to_{t\to\infty} \frac{\bar{\omega}a^2t}{L} \;,
$$

che aumenta nel tempo (linearmente a tempi lunghi), mentre il suo valore massimo si sposta con una velocità $\bar{\omega}a^2k_0$ esattamente uguale alla velocità di gruppo

$$
v_g = \left.\frac{d\omega(k)}{dk}\right|_{k=k_0} = \left.\frac{d}{dk}\left[\bar{\omega}\left(1+\frac{a^2k^2}{2}t\right)\right]\right|_{k=k_0} = \bar{\omega}a^2k_0 \;.
$$

Evidentemente le quantità fisiche corrispondono a

$$
\Re\;[u(x,t)] = \Re\left[\mathcal{A}(x,t)\; e^{i(k_0x-\omega_0t)} + (k_0 \to -k_0)\right] \;.
$$

Nelle figure 1. e 2. si illustrano i risultati. Il pacchetto gaussiano (5) è raffigurato in figura 1. e corrisponde al pacchetto in evoluzione (13) all'istante $t=0$. I parametri scelti sono (in unità arbitrarie): $L=10$, $a=3L=30$, $k_0=0.8$ ovvero $\lambda_0 = 2\pi/k_0 \approx 7.85$, $\bar{\omega}=1.6$ e quindi il periodo di oscillazione risulta $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 0.0136$ essendo $\omega_0 = \bar{\omega}\cdot(1+a^2k_0^2/2) = 462.4$.
La figura 2. mostra l'evoluzione del pacchetto a tempi diversi, la parte in alto riproduce (in scala opportuna) la figura 1., ovvero il pacchetto all'istante iniziale, la porzione in mezzo mostra il pacchetto dopo un tempo $t_1 = 0.03 \approx 2.2T_0$, la porzione in basso mostra il pacchetto dopo un lasso di tempo $t_2 = 0.18 \approx 13.2T_0$. Si nota come il pacchetto va allargandosi in virtù del mezzo dispersivo in cui è immerso.

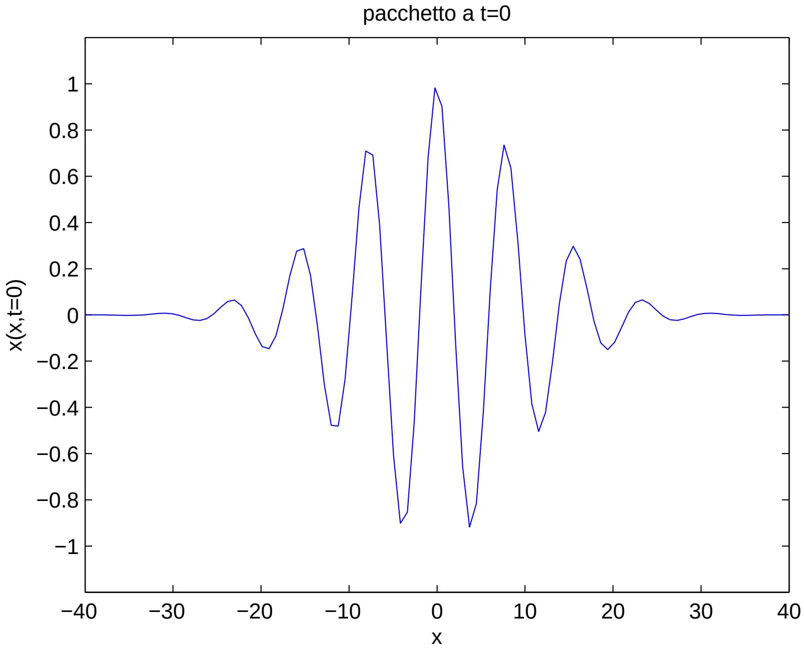

Figure 1: $\Re u(x, t = 0)$ *dall'equazione (5) o (13), vedi testo per la descrizione dei parametri.*

.

.

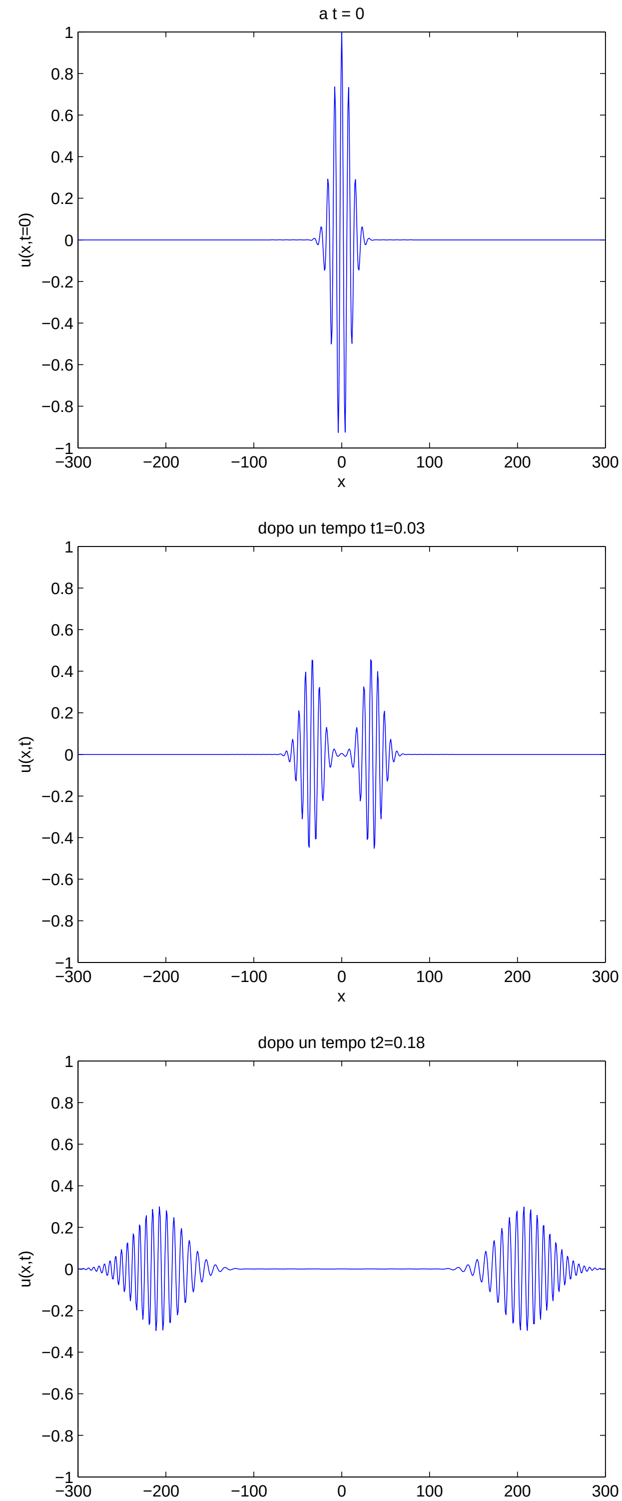

Figure 2: *Il pacchetto di figura 1. durante la sua evoluzione dinamica ($\Re u(x,t)$ di eq.(13)) in un mezzo dispersivo e secondo i parametri discussi nel testo. Il pacchetto a $t = 0$ (figura superiore), a $t_1 = 0.03$ (figura intermedia), a $t = 0.18$ (figura inferiore)*