Reazione di radiazione e larghezza naturale della riga emessa

Assumiamo che, nel modello ad oscillatori della materia, agli elettroni sia conferita una certa energia (ad esempio riscaldando una lampada a gas). A causa della perdita di energia meccanica dovuta alla radiazione diffusa dall'oscillatore carico, la stessa radiazione emessa non è perfettamente monocromatica. Infatti, dall'equazione dell'oscillatore (assumiamo di risolvere il problema in una dimensione, le altre sono analoghe)

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \ ,$$

il moto si riduce (per opportune condizioni iniziali)[1]

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\, e^{-i\omega_f t} \approx x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\, e^{-i\omega_0 t} \ , \quad \text{con } \omega_f^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} \ ; \tag{1}$$

La reazione di radiazione (gli effetti dell'emissione di radiazione sullo stesso oscillatore) sono un argomento difficile da affrontare in generale, ma possono essere stimati in modo semplice nel caso di un moto periodico dell'elettrone. Si può così stimare la forza meccanica sull'elettrone dovuta all'emissione. Assumendo che la forza viscosa $F_v = -m_e \gamma \dot{x}$, sia interamente dovuta alla perdita di energia per radiazione, si ha che la perdita di potenza meccanica dovuta alla forza viscosa (mediata sul ciclo: $\langle F_v \dot{x} \rangle$) deve uguagliare la perdita in potenza per emissione di radiazione ($\langle P_{\text{diff}} = \frac{2}{3}\frac{k_e e^2}{c^3}\langle (\ddot{x})^2 \rangle$), cioè:

$$\langle -m_e \gamma \dot{x}\dot{x} \rangle + \frac{2}{3}\frac{k_e e^2}{c^3}\langle (\ddot{x})^2 \rangle = 0 \ .$$

In ogni ciclo gli effetti dovuti alla forza viscosa sono molto piccoli ($\gamma \ll \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, come si dovrà verificare a posteriori) e la parte reale della soluzione (1) può essere scritta

$$\Re\, x(t) = x_0 e^{-\gamma/2t} \cos \omega_f t \approx x_0 \cos \omega_0 t \ ,$$

[1] La soluzione generale dell'equazione del moto per condizioni iniziali fissate da $x(t=0) = x_0$ e $\dot{x}(t=0) = v_0$, può essere scritta

$$x(t) = e^{-\gamma/2t}\left[\frac{1}{\omega_f}\left(\frac{\gamma}{2}x_0 + v_0\right)\sin\omega_f t + x_0 \cos\omega_f t\right] \ ,$$

la soluzione (1) corrisponde a condizioni iniziali $x(t=0) = x_0$ e $v_0 = -\gamma x_0/2$ come può essere facilmente verificato.

per un lungo intervallo di tempo $T_0 \ll t \ll \gamma^{-1}$, in cui il moto è approssimativamente periodico. Si ottiene così :

$$\langle -m_e \gamma \dot{x}^2 \rangle = -m_e \gamma x_0^2 \, \omega_0^2 \, \frac{1}{2}$$

e

$$\frac{2}{3} \frac{k_e e^2}{c^3} \langle \ddot{x}^2 \rangle = \frac{2}{3} \frac{k_e e^2}{c^3} \, x_0^2 \, \frac{1}{2} \, \omega_0^4 \; .$$

Uguagliando

$$\frac{2}{3} \frac{k_e e^2}{c^3} \, x_0^2 \, \frac{1}{2} \, \omega_0^4 = m_e \gamma \, x_0^2 \, \omega_0^2 \, \frac{1}{2}$$

ovvero

$$\gamma \approx \frac{2}{3} \frac{k_e e^2}{m_e c^3} \, \omega_0^2 \; . \tag{2}$$

Il valore relativo di γ:

$$\frac{\gamma}{\omega_0} = \frac{2}{3} \frac{k_e e^2}{m_e c^3} \, \omega_0 = \frac{2}{3} \frac{k_e e^2}{m_e c^3} \, \frac{2\pi c}{\lambda_0} \approx \frac{1.2 \cdot 10^{-4} \text{ Å}}{\lambda_0} \quad : \tag{3}$$

$$10^{-8} < \frac{\gamma}{\omega_0} < 10^{-2} \; ; \tag{4}$$

per lunghezze d'onda dal visibile ($\lambda \approx 5000$ Å) ai raggi X ($\lambda \approx 10^{-2}$ Å), verificando l'assunzione $\gamma \ll \omega_0$.
Esercizio: verificare che le stesse conclusioni possono essere raggiunte nel caso di un oscillatore forzato da un campo elettrico esterno $\mathbf{E} = \hat{x} E_0 e^{-i\omega t}$.
(suggerimento: il moto è ora dato da $\Re x(t) = \Re \left[\frac{q_e/m_e}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E_0 e^{-i\omega t} \right] ...$)

Larghezza naturale (radiativa) della riga emessa

La (parte radiativa, naturale) della larghezza della riga spettrale emessa[2] può essere ricavata da un'analisi di Fourier dei campi che sono proporzionali (nel limite $\gamma \ll \omega_0$) alla (1), ovvero[3]

$$E(t) = E_0 \, e^{-\frac{\gamma}{2} t} \, e^{-i\omega_0 t} \; . \tag{5}$$

[2] Diversi fattori allargano ulteriormente la riga emessa da un gas riscaldato, quali l'effetto doppler dell'atomo in movimento e l'interruzione, a causa degli urti con gli altri atomi, del treno d'onda emesso.

[3] Per essere precisi il campo elettrico è proporzionale a $\ddot{x}$, ma nel limite $\gamma \ll \omega_0$, la derivata seconda della (1), $\ddot{x} = x_0(-i\omega_0 - \gamma/2)^2 \, e^{-\frac{\gamma}{2} t} \, e^{-i\omega_0 t} \approx -x_0 \, \omega_0^2 \, e^{-\frac{\gamma}{2} t} \, e^{-i\omega_0 t} \sim E_0 \, e^{-\frac{\gamma}{2} t} \, e^{-i\omega_0 t}$, come espresso dalla (5).

Ne segue

$$\begin{aligned} E(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t)\, e^{i\omega t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} E_0\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}\, e^{-i\omega_0 t}\, e^{i\omega t}\, dt \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i(\omega-\omega_0)-\frac{\gamma}{2}} \end{aligned}$$

corrispondente ad un'intensità di radiazione $I(\omega) \sim |E(\omega)|^2$

$$I(\omega) = I_0 \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega-\omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}$$

e normalizzata in modo tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} I(\omega) d\omega = I_0$. La larghezza della riga $\Delta\omega$, misurata a metà altezza, risulta

$$\Delta\omega \approx \gamma = \frac{2}{3} \frac{k_e e^2}{m_e c^3} \omega_0^2 \ . \tag{6}$$

La stessa larghezza espressa in funzione della lunghezza d'onda è [4]

$$|\Delta\lambda| = 2\pi c \frac{\Delta\omega}{\omega_0^2} = \frac{4\pi}{3} \frac{k_e e^2}{m_e c^2} = \frac{4\pi}{3} r_0 \approx 10^{-12} \ \text{cm} \ ,$$

ed è costante ed indipendente dalla frequenza dell'oscillatore. In pratica lo smorzamento radiativo non è la sola causa di allargamento della riga spettrale: interruzioni del treno d'onda dovute a collisioni tra atomi e l'effetto Doppler contribuiscono ad allargare le righe spettrali.
La relazione (6), scrivibile anche:

$$\Delta\omega \cdot \gamma^{-1} = \Delta\omega \cdot \tau \approx 1$$

tra la larghezza (radiativa) della riga e la vita media (radiativa $\tau = \gamma^{-1}$) dello stato, equivale alla relazione

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar \ , \tag{7}$$

se $\Delta E = \hbar\Delta\omega$. La (7) è la relazione quantistica tra la vita media e la larghezza in energia di uno stato.

[4] Si noti che $\lambda \cdot \omega = 2\pi c$ e quindi che $\Delta\lambda \cdot \omega + \lambda \cdot \Delta\omega = 0$