Esercizi

sulle onde piane

1.

Scrivere esplicitamente il campo elettrico e magnetico (e la loro parte reale) per un'onda monocromatica piana di ampiezza E_0, pulsazione ω e costante di fase nulla, nei seguenti casi:

i) onda piana viaggiante nel vuoto nella direzione dell'asse $\hat{x}$ negativo e polarizzata nella direzione $\hat{z}$;

ii) viaggiante nel vuoto nella direzione dall'origine al punto $(1, 1, 1)$, con polarizzazione parallela al piano $x\,z$. In entrambi i casi fare un disegno dell'onda e dare le componenti Cartesiane esplicite del vettore di propagazione $\mathbf{k}$ e di polarizzazione $\hat{\mathbf{n}}$.
(Si noti che vale dunque la: $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{n}}\, E_0 \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \delta)$........)

soluzione:
In entrambi i casi valgono le

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \hat{\mathbf{n}}\, E_0 \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= (\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{n}})\,\frac{1}{c} E_0 \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\\ |\mathbf{k}| &= \frac{\omega}{c}\ ;\end{aligned}$$

i) nel primo caso: $\hat{\mathbf{k}} = (-1, 0, 0)$, $\hat{\mathbf{n}} = (0, 0, 1)$. Dunque $(\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{y}}$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \hat{\mathbf{z}}\, E_0 \cos(-kx - \omega t) = \hat{\mathbf{z}}\, E_0 \cos(kx + \omega t)\\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \hat{\mathbf{y}}\,\frac{1}{c} E_0 \cos(kx + \omega t)\ .\end{aligned}$$

ii) Nel secondo caso: $\hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, ed $\hat{\mathbf{n}}$ deve essere tale che $\hat{\mathbf{n}} = a\hat{\mathbf{x}} + b\hat{\mathbf{z}}$ e $\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 0$, in modo da giacere nel piano $x\,z$, ed essere perpendicolare a $\hat{\mathbf{k}}$; (inoltre deve valere $\hat{\mathbf{E}}\times\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{k}}$, ovvero: $\hat{\mathbf{n}}\times(\hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{k}}$, in modo che l'onda si propagnhi nella direzione $\hat{\mathbf{k}}$).
Dunqe: dal fatto che $|\hat{\mathbf{n}}| = 1 \rightarrow a^2 + b^2 = 1$, da $\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 0 \rightarrow a = -b$; risultato

$$\hat{\mathbf{n}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{z}})\ .$$

Ne risulta, come direzione del campo magnetico

$$\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{n}} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(-\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}})\ ,$$

e, come prima discusso, essendo $\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{k}}$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}) = \pm \frac{1}{\sqrt{12}} (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{z}}) \times (-\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}}) = \pm \frac{2}{2\sqrt{3}} (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}) = \pm \hat{\mathbf{k}} \; ;$$

ed il segno da scegliere è quello positivo in tutte le formule.

2.

Trovare tutti gli elementi del tensore degli sforzi di Maxwell

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

per un'onda piana monocromatica viaggiante nella direzione $\hat{\mathbf{z}}$ e linearmente polarizzata nella direzione $\hat{\mathbf{x}}$. Discutere il risultato.

soluzione

Nel vuoto

$$T_{\alpha\beta} = \epsilon_0 \left(E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \mathbf{E}^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \mathbf{B}^2 \right)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \hat{\mathbf{x}} \, E_0 \cos(kz - \omega t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \hat{\mathbf{y}} \frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t) \; , \end{aligned}$$

pertanto

$$\begin{aligned} T_{xx} &= \epsilon_0 \left(1 - \frac{1}{2} \right) E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) + \frac{1}{\mu_0} \left(0 - \frac{1}{2} \right) \frac{E_0^2}{c^2} \cos^2(kz - \omega t) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 - \epsilon_0 \mu_0 \frac{1}{\mu_0} \right) E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) = 0 \; ; \quad T_{xy} = 0 \; ; \quad T_{xz} = 0 \; ; \\ T_{yx} &= 0 \; ; \quad T_{yy} = \frac{1}{2} \left(-\epsilon_0 + \epsilon_0 \mu_0 \frac{1}{\mu_0} \right) E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) = 0 \; ; \quad T_{yz} = 0 \; ; \\ T_{zx} &= 0 \quad T_{zy} = 0 \; ; \quad T_{zz} = \frac{1}{2} \left(-\epsilon_0 - \epsilon_0 \mu_0 \frac{1}{\mu_0} \right) E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) \; ; \end{aligned}$$

ovvero

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) \end{pmatrix} .$$

Si ricorda che:

$$\begin{aligned} & \varrho E_\alpha + (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_\alpha + \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{D} \times \mathbf{B}]_\alpha = \\ = \ & \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left\{ \left[E_\alpha D_\beta - \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}\, \delta_{\alpha\beta} \right] + \left[H_\alpha B_\beta - \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}\, \delta_{\alpha\beta} \right] \right\} = \frac{\partial}{\partial x_\beta} T_{\alpha\beta} \ , \end{aligned}$$

e nel nostro caso $\varrho = 0$, $\mathbf{j} = 0$; dunque

$$\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\beta} T_{\alpha\beta} \ ,$$

cioè

$$\begin{aligned} & \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]_z = \frac{\partial}{\partial z} T_{zz} \ , \\ & \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{E_0^2}{c} \cos^2(kz - \omega t) = \frac{\partial}{\partial z} \epsilon_0 \left(-E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) \right) \\ & -\frac{\omega}{c} = -k \ , \end{aligned}$$

che verifica la correttezza del calcolo perché $\omega = kc$. Infatti la forza per unità di area che è dovuta al tensore diventa

$$dF_z = T_{zz}(-da_z) = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t)\, da_z \ ,$$

dove il segno $(-)$ tiene conto che la superficie considerata su cui incide l'onda che si propaga nella direzione $\hat{\mathbf{z}}$ è diretta lungo $-\hat{\mathbf{z}}$.
In conclusione, la pressione di radiazione

$$P = \frac{\langle dF_z \rangle}{da_z} = \epsilon_0 E_0^2 \langle \cos^2(kz - \omega t) \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 \ ;$$

Dunque il tensore degli sforzi è consistente con l'interpretazione della forza esercitata su di una superficie dalla radiazione e che abbiamo chiamato pressione di radiazione:

$$P = \frac{I}{c} = \frac{1}{c} \langle \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 \ ,$$

se la supreficie è perfettamente assorbente (non viene considerato alcun campo emesso (riflesso) dalla superficie).