Esercizi

sul Vettore di Poynting

1.

Un tratto di filo di conducibilità σ è percorso da una corrente I stazionaria, discutere il bilancio dell'energia locale relativo ad un tratto infinitesimo Δl sapendo che la sua sezione circolare ha raggio a.

All'interno del filo, in base alla legge di Ohm, è presente un campo elettrico $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ dove $|\vec{j}| = I/(\pi a^2)$, per cui $|\vec{E}| = I/(\pi a^2 \sigma)$.
Il campo magnetico sulla superficie del filo vale $|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{a}$ e circola intorno al filo.
Data la configurazione dei campi risulta presente sulla superficie del filo un vettore di Poynting diretto verso l'interno del filo ($-\hat{r}$) di valore

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} = -\hat{r}\frac{1}{\mu_0}E\,B = -\hat{r}\frac{I}{\pi a^2 \sigma}\frac{1}{4\pi}\frac{2I}{a} \tag{1}$$

corrispondente ad una potenza entrante nel filo pari a

$$-\int \vec{S} \cdot d\vec{a} = |\vec{S}|\,2\pi a \Delta l = I^2 \frac{1}{\sigma}\frac{\Delta l}{\pi a^2} = I^2\,(\Delta R) \tag{2}$$

dove (ΔR) è la resistenza elettrica relativa al tratto di filo Δl, ($\Delta R = \frac{1}{\sigma}\frac{\Delta l}{\pi a^2}$) e $I^2\,\Delta R$ è proprio la potenza dissipata per effetto Joule nel tratto di filo in esame.
Conclusione la conservazione dell'energia non è soltanto valida per tutto il sistema filo-batteria, ma anche per ogni tratto locale di filo.

2.

Un condensatore a facce piane e parallele circolari (raggio a, area $A = \pi a^2$ e distanza di separazione d) sta caricandosi: la differenza di potenziale ai suoi capi sia $V(t)$ all'istante t. Dimostrare che il flusso del vettore di Poynting sulla sua superficie coincide con la potenza $V(t) \cdot i(t)$, cioè con il lavoro per unità di tempo per portare la carica sulle sue facce ($dL(t) = V(t)dq(t) = V(t)i(t)dt$, ovvero $\frac{dL}{dt} = V(t)i(t)$). **Si trascurino tutti gli effetti ai bordi**.

Si assuma che la faccia inferiore sia carica positivamente in modo che il campo elettrico sia diretto lungo la direzione perpendicolare $\hat{z}$. All'interno del condensatore il campo elettrico vale

$$\mathbf{E} = \hat{z}E(t) = \hat{z}\frac{V(t)}{d} = \hat{z}\frac{1}{C}\frac{q(t)}{d} \quad \text{ovvero} \quad \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{C}\frac{i(t)}{d}\,, \tag{3}$$

dove $C = \epsilon_0 A/d$ è la capacità del condensatore. Un campo magnetico circolerà nella direzione $\hat{\phi}$ ai bordi del condensatore in virtù della corrente di spostamento che si instaura all'interno ($\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$)

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = B\,2\pi a = \mu_0\epsilon_0\pi a^2\frac{\partial E}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad B(t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2i(t)}{a}$$

Un flusso *entrante* del vettore di Poynting fornirà una potenza attraverso la superficie laterale del condensatore

$$\int_S \mathbf{S}\cdot d\mathbf{a} = \left|\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu_0}\right| (2\pi a)\,d = \frac{1}{\mu_0}\,\frac{V(t)}{d}\,\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2i(t)}{a}\,2\pi a d = V(t)\,i(t)\ .$$

Si noti che, in virtù della (3)

$$V(t)i(t) = Cd^2\,\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = (\pi a^2 d)\,\frac{\partial}{\partial t}\frac{\epsilon_0}{2}\mathbf{E}^2 = \frac{d}{dt}\int dV\,\frac{\epsilon_0}{2}\mathbf{E}^2 = \frac{d}{dt}\int dV u_E\,,$$

ovvero tutto il lavoro per unità di tempo fatto sul condensatore va ad incrementare l'energia elettrica interna.

Il contributo della densità di energia magnetica come mai non contribuisce pur essendo presente un campo magnetico durante il transiente di carica?

Calcoliamo il contributo magnetico sotto l'assunzione (peraltro già utilizzata) che la densità di carica sulle piastre resti uniforme nel tempo, ovvero che il campo elettrico tra le piastre e la sua derivata obbediscano ancora alla (3) . Avremo che all'interno del condensatore il campo magnetico circola rispettando la

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = B\,2\pi r = \mu_0\epsilon_0\pi r^2\frac{\partial E}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad B(r,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2i(t)}{a^2}\,r$$

ovvero (scegliendo $dV = 2\pi r dr \cdot d$)

$$U_B(t) = \int dV u_B(r,t) = \int dV\,\frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2(r,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i^2(t)}{a^4}\,d\int_0^a r^3\,dr = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i^2(t)}{4}\,d\,.$$

Il contributo elettrico, diventa

$$U_E(t) = \int dV u_E(r,t) = \int dV\,\frac{\epsilon_0}{2}\mathbf{E}^2(r,t) = \frac{1}{2\epsilon_0}\frac{q^2(t)}{\pi a^2}\,d.$$

Di conseguenza (ricordando che $q(t) = Q_0(1-e^{-t/\tau})$ e $i(t) = dq/dt = \frac{Q_0}{\tau}e^{-t/\tau}$ con $\tau = R \cdot C$)

$$\frac{U_E}{U_B} = \frac{8}{\mu_0\epsilon_0}\frac{q^2(t)}{i^2(t)\,a^2} \sim \frac{8}{\mu_0\epsilon_0}\frac{\tau^2}{a^2}\,.$$

Siccome $\frac{1}{\mu_0\epsilon_0} = c^2 \approx (3 \cdot 10^8)^2$ (m/sec)^2 le due energie saranno paragonabili per

$$c\,\tau \approx a$$

e se $a \approx 1$ cm $= 10^{-2}$ m, $\tau \approx 10^{-10}$ sec.

Potremmo dimostrare che se paragonassimo le derivate temporali

$$\frac{\frac{\partial U_E}{\partial t}}{\frac{\partial U_B}{\partial t}} = \frac{8}{\mu_0\epsilon_0}\frac{1}{a^2}\frac{q(t)}{d^2q(t)/dt^2}$$

otterremmo lo stesso risultato. Interessante è fare il conto assumendo

$$V(t) = V_0 \cos\omega t$$

ovvero $q(t) = Q_0 \cos\omega t$, si otterrebbe un'equivalente relazione

$$\frac{\frac{\partial U_E}{\partial t}}{\frac{\partial U_B}{\partial t}} = \frac{8}{\mu_0\epsilon_0}\frac{1}{\omega^2\,a^2}$$

e $\omega \approx 10^{10}$ rad/sec.

3.

Potremmo considerare anche un solenoide di sezione circolare di raggio a e con n spire per unità di lunghezza. Sia lungo $L \gg a$, così da trascurare gli effetti ai bordi. Il solenoide è nel transiente di carica. Dimostrare che il flusso del vettore di Poynting eguaglia, ancora una volta, il lavoro fatto per unità di tempo per portare il solenoide a regime

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mathcal{L}i^2(t)\right)\,,$$

dove $\mathcal{L} = \mu_0(\pi a^2)Ln^2$ è l'induttanza del solenoide. Il campo magnetico (nullo all'esterno, nelle approssimazioni fatte), vale all'interno del solenoide

$$B(t) = \mu_0\,n\,i(t)\,,$$

mentre il campo elettrico ha modulo tale che

$$E(t)\,2\pi a = \frac{d}{dt}(B(t)\,\pi a^2) = (\pi a^2)\,\mu_0\,n\,\frac{di}{dt}.$$

Così che il flusso del vettore di Poynting risulta proprio

$$-\int \mathbf{S}\cdot d\mathbf{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mathcal{L}i^2(t)\right)\,.$$

Discutere le approssimazioni fatte, come nel caso dell'esercizio **2.**