Tensore degli sforzi di Maxwell

Il campo elettromagnetico nel vuoto è descritto dalle equazioni di Maxwell (in unità MKSA)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0} \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{4}$$

La forza di Lorentz che agisce su di una carica (puntiforme) che si muove con velocità $\mathbf{v}$ è data dalla[1]

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \ . \tag{5}$$

che può essere scritta (nel caso di una distribuzione di carica nota ϱ come un integrale su di una forza per unità di volume $\mathbf{F} = \int dV\, \mathbf{f}$. Se si potesse esprimere la forza $\mathbf{f}$ tramite le derivate di un tensore, basterebbe la conoscenza di tale tensore sulla superficie che racchiude un certo volume per conoscere le forze che agiscono sullo stesso volume (teorema della divergenza o di Gauss), più precisamente se valesse

$$f_\alpha = div\ \mathbf{T}_\alpha = \sum_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} T_{\alpha\beta} \tag{6}$$

si avrebbe

$$F_\alpha = \int_V dV f_\alpha = \int_V dV\ div\ \mathbf{T}_\alpha = \int_{S(V)} \mathbf{T}_\alpha \cdot d\mathbf{a} = \int_{S(V)} \sum_\beta T_{\alpha\beta}\, da_\beta \, , \tag{7}$$

dove $S(V)$ è la superficie chiusa che racchiude il volume V in cui il tensore $T_{\alpha\beta}$ è noto. $T_{\alpha\beta}$ è rappresentato da una matrice 3×3 simmetrica (come si dimostrerà) ed è detto tensore degli sforzi.

[1] si suppone che la presenza della carica q *di prova* non alteri apprezzabilmente i campi esterni $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$

Tensore degli sforzi nela caso elettrostatico

Come primo esercizio lo ricaviamo nel caso elettrostatico e nel vuoto. In questo caso la forza di Lorentz agente sulle cariche è dovuta solamente al campo elettrico presente

$$F_\alpha = \int_V dV f_\alpha = \int_V dV\, \varrho\, E_\alpha = \epsilon_0 \int_V dV\ (\nabla \cdot \mathbf{E})\ E_\alpha \tag{8}$$

da cui $f_\alpha = \epsilon_0\ (\nabla \cdot \mathbf{E})\ E_\alpha$ che può essere rimaneggiata per ottenere il tensore T, infatti (la somma su indici ripetuti verrà sottintesa ora in avanti)

$$\begin{aligned} f_\alpha &= \epsilon_0\, E_\alpha\ (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \epsilon_0\, E_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\beta} E_\beta = \\ &= \epsilon_0 \left[\frac{\partial}{\partial x_\beta} (E_\alpha\, E_\beta) - E_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} E_\alpha \right] \end{aligned} \tag{9}$$

dove si è fatto uso delle proprietà delle derivate di un prodotto di funzioni. L'equazione (9) può essere ulteriormente rimaneggiata (in particolare il secondo termine in parentesi) se si tiene conto della relazione

$$\frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{\partial E_\beta}{\partial x_\alpha} \tag{10}$$

valida in maniera banale per $\alpha = \beta$ e soddisfatta anche nel caso $\alpha \neq \beta$ in virtù delle proprietà irrotazionali del campo elettrico statico, ovvero $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Si ottiene:

$$\begin{aligned} f_\alpha &= \epsilon_0 \left[\frac{\partial}{\partial x_\beta} (E_\alpha\, E_\beta) - E_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} E_\beta \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_\beta} \epsilon_0 \left[E_\alpha\, E_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right] \equiv \frac{\partial}{\partial x_\beta} T_{\alpha\beta}\,, \end{aligned} \tag{11}$$

giungendo così alla forma desiderata che definisce il tensore degli sforzi come la matrice **simmetrica**

$$T = \epsilon_0 \begin{pmatrix} E_x^2 - \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 & E_x E_y & E_x E_z \\ E_y E_x & E_y^2 - \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 & E_y E_z \\ E_z E_y & E_z E_y & E_z^2 - \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 \end{pmatrix} . \tag{12}$$

T ammette quindi una forma diagonale da raggiungere attraverso una rotazione degli assi del sistema di riferimento, assi principali) e gli elementi sono gli autovalori dell'equazione $T \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$, $\lambda_1 = \frac{\epsilon_0}{2}\mathbf{E}^2$, $\lambda_{2,3} = -\frac{\epsilon_0}{2}\mathbf{E}^2$ (verificare come esercizio). Evidentemente questo sistema è quello in cui il campo elettrico $\mathbf{E}$ risulta orientato lungo l'asse $\hat{x}$ e quindi le componenti $E_y = E_z = 0$ e vale $\mathbf{E}^2 = E_x^2$, da cui

$$T = \epsilon_0 \left(\begin{array}{ccc} +\frac{1}{2}\mathbf{E}^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\mathbf{E}^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\mathbf{E}^2 \end{array} \right) . \tag{13}$$

Dal punto di vista fisico, $T_{\alpha\beta}$ è una forza per untà di area (o sforzo) che agisce sulla superficie. Più precisamente: $T_{\alpha\beta}$ è la forza (per unità di area) nella direzione "α" che agisce su di un elemento di superficie orientata nella direzione "β". Gli elementi diagonali (T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}) rappresentano *pressioni o tensioni* e gli elementi fuori dalla diagonale $(T_{xy}, T_{yz}...)$ rappresentano *sforzi di taglio.*

Studiamo, ad esempio, le forze (di tensione o di pressione) esercitate da un campo elettrico statico su di una superficie localmente piana $d\mathbf{a} = \hat{n}\, da = (da_x, da_y, da_z) = (\hat{x} \cdot \hat{n}, \hat{y} \cdot \hat{n}, \hat{z} \cdot \hat{n})\, da$. Il sistema di riferimento è scelto in modo da avere assi principali e la forma diagonale della matrice, in pratica l'asse $\hat{x}$ va orientato lungo $\mathbf{E}$.
Risulta che (dalla (7))

$$\begin{aligned} dF_x &= T_{xx}da_x + T_{xy}da_y + T_{xz}da_z \equiv T_{xx}da_x \\ dF_y &= T_{yx}da_x + T_{yy}da_y + T_{yz}da_z \equiv T_{yy}da_y \\ dF_z &= T_{zx}da_x + T_{zy}da_y + T_{zz}da_z \equiv T_{zz}da_z \; . \end{aligned} \tag{14}$$

Esempio 1): il campo elettrico risulti ortogonale all'elemento di superficie e quindi parallelo a $d\mathbf{a} = \hat{n}\, da = (da_x, 0, 0)$, si ottiene

$$\begin{aligned} dF_x &= T_{xx}da_x = \frac{1}{2}\epsilon_0 \mathbf{E}^2 da \\ dF_y &= T_{yy}da_y = 0 \\ dF_z &= T_{zz}da_z = 0 \; . \end{aligned} \tag{15}$$

Ovvero **una tensione** sulla superficie, cioè una forza nella stessa direzione di $\hat{n}$, $d\mathbf{F} = \hat{x}\, dF_x = \hat{n}\, dF_x$.
Esempio 2): il campo elettrico risulti paralleo all'elemento di superficie e quindi ortogonale a $d\mathbf{a} = \hat{n}\, da = (0, da_y, 0)$ (per esempio). Si ottiene

$$dF_x = T_{xx}da_x = 0$$

$$\begin{aligned} dF_y &= T_{yy}da_y = -\frac{1}{2}\epsilon_0\mathbf{E}^2 da \\ dF_z &= T_{zz}da_z = 0\ . \end{aligned} \tag{16}$$

Ovvero **una compressione** sulla superficie, cioè una forza nella direzione opposta a $\hat{n}$, $d\mathbf{F} = \hat{y}\, dF_y = -\hat{n}\, dF_y$.
Esempio 3): il campo elettrico (che va posto lungo l'asse principale $\hat{x}$ per semplicità) formi un angolo generico θ con la normale alla superficie $d\mathbf{a} = \hat{n}\, da = (\cos\theta, \sin\theta, 0)\, da$. Si ottiene

$$\begin{aligned} dF_x &= T_{xx}da_x = +\frac{1}{2}\epsilon_0\mathbf{E}^2\, \cos\theta\, da \\ dF_y &= T_{yy}da_y = -\frac{1}{2}\epsilon_0\mathbf{E}^2\, \sin\theta\, da \\ dF_z &= T_{zz}da_z = 0\ . \end{aligned} \tag{17}$$

Ovvero la forza $d\mathbf{F} = \hat{x}\, dF_x + \hat{y}\, dF_y = \frac{1}{2}\epsilon_0\mathbf{E}^2\, da\, (\cos\theta, -\sin\theta)$, è posta in modo tale che il campo elettrico risulta lungo la bisettrice tra $\hat{n}$ e $d\mathbf{F}$. In particolare per $\theta = 45^0$ la forza risulta parallela alla superficie. (si noti che il risultato (17) si riduce ai risultati precendeti se $\theta = 0$ risultato(15), se $\theta = \pi/2$, risultato (16).

Tensore degli sforzi: caso generale

Nel caso generale la forza di Lorentz (5) potrà essere scritta per distribuzioni continue di cariche e correnti libere introdotte in un mezzo (per semplificare valgono le notazioni $\varrho \equiv \varrho_{\rm lib}$, $\mathbf{j} \equiv \mathbf{j}_{\rm lib}$)

$$\begin{aligned} F_\alpha &= \int_V dV f_\alpha = \int_{S(V)} \sum_\beta T_{\alpha\beta}\, da_\beta = \\ &= \int_V dV\ \left[\varrho\, \mathbf{E} + (\mathbf{j}\times\mathbf{B})\right]_\alpha = \\ &= \int_V dV\ \left[(\nabla\cdot\mathbf{D})\ \mathbf{E} + \left(\nabla\times\mathbf{H} - \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)\times\mathbf{B}\right]_\alpha = \\ &= \int_V dV\ \left[\mathbf{E}\ (\nabla\cdot\mathbf{D}) - \mathbf{B}\times\nabla\times\mathbf{H} - \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\times\mathbf{B}\right]_\alpha\ , \end{aligned} \tag{18}$$

che può essere ulteriormente rimaneggiata utilizzando le

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\times\mathbf{B}+\mathbf{D}\times\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\ , \\
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\nabla\times\mathbf{E}\ ,
\end{aligned} \tag{19}
$$

ottenendo:

$$
\begin{aligned}
F_\alpha \;=\; \int_V dV \Big[& -\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) + (\mathbf{E}\ (\nabla\cdot\mathbf{D}) - \mathbf{D}\times(\nabla\times\mathbf{E})) + \\
& + (\mathbf{H}\ (\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{H}))\Big]_\alpha\ .
\end{aligned} \tag{20}
$$

Il termine $\mathbf{H}(\nabla\cdot\mathbf{B})$ è stato aggiunto per ottenere espressioni simmetriche in $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$ dato che risulta in ogni caso nullo in virtù della $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$.

Si può dimostrare (vedi appendice) la seguente uguaglianza

$$
\begin{aligned}
&\Big[\ \mathbf{E}\ (\nabla\cdot\mathbf{D}) - \mathbf{D}\times(\nabla\times\mathbf{E})\Big]_\alpha = \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x_\alpha} - \mathbf{D}\cdot\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_\alpha}\right] + \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[E_\alpha D_\beta - \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\,\delta_{\alpha\beta}\right]\ ,
\end{aligned} \tag{21}
$$

analogamente per la parte con $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}$.

In conclusione potremmo scrivere

$$
\begin{aligned}
& \varrho E_\alpha + (\mathbf{j}\times\mathbf{B})_\alpha + \\
- & \frac{1}{2}\underbrace{\left[\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x_\alpha} - \mathbf{D}\cdot\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_\alpha}\right]} - \frac{1}{2}\underbrace{\left[\mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_\alpha} - \mathbf{B}\cdot\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_\alpha}\right]} + \left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}\times\mathbf{B}\right]_\alpha = \\
= & \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left\{\left[E_\alpha D_\beta - \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\,\delta_{\alpha\beta}\right] + \left[H_\alpha B_\beta - \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\,\delta_{\alpha\beta}\right]\right\}\ ,
\end{aligned}
$$

e, per i mezzi omogenei ed isotropi dove le costanti dielettriche e magnetiche **non** dipendono dalla posizione, i termini $\underbrace{[\ \ ]}$ si annullano perchè i contributi tra parentesi si cancellano tra loro. Si ottiene

$$
\begin{aligned}
& \varrho E_\alpha + (\mathbf{j}\times\mathbf{B})_\alpha + \left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}\times\mathbf{B}\right]_\alpha = \\
= & \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left\{\left[E_\alpha D_\beta - \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\,\delta_{\alpha\beta}\right] + \left[H_\alpha B_\beta - \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\,\delta_{\alpha\beta}\right]\right\} = \frac{\partial}{\partial x_\beta}T_{\alpha\beta}\ ,
\end{aligned}
$$

dove si è identificato il tensore degli sforzi con $T_{\alpha\beta}$. La forma integrale della precendente equazione ne aiuta l'interpretazione:

$$\underbrace{\int_V dV\ [\varrho\mathbf{E} + (\mathbf{j}\times\mathbf{B})]_\alpha}_{\substack{\text{forza sulla materia ovvero}\\ \text{variazione della quantità}\\ \text{di moto meccanica}}} \quad + \quad \frac{d}{dt}\underbrace{\int_V dV\ [\mathbf{D}\times\mathbf{B}]_\alpha}_{\substack{\text{variazione quantità di}\\ \text{moto del campo}}} \quad = \quad \underbrace{\int_{S(V)}\sum_\beta T_{\alpha\beta}\,da_\beta}_{\text{tensore di Maxwell}} =$$

$$= \tfrac{d}{dt}\mathbf{p}_\alpha^{\text{meccanica}} \qquad + \qquad \tfrac{d}{dt}\mathbf{p}_\alpha^{\text{campo}} \qquad = \qquad \textstyle\int_S T_{\alpha\beta}da_\beta\ .$$

In assenza di forze sul volume $\int_S T_{\alpha\beta}da_\beta = 0$ e la quantità di moto si conserva, **ma** solo se in include appropriatamente la quantià di moto trasportata dal campo

$$\mathbf{p}^{\text{campo}} = \int_V dV\,\mathbf{D}\times\mathbf{B} = \frac{\epsilon_r\mu_r}{c^2}\int_V dV\,\mathbf{E}\times\mathbf{H} = \int_V dV\,\frac{\epsilon_r\mu_r}{c^2}\,\mathbf{S} = \int_V dV\,\mathbf{g}\ ,$$

dove si è definità la densità di quantità di moto del campo $\mathbf{g} = \frac{\epsilon_r\mu_r}{c^2}\mathbf{S}$ ed $\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$ è il vettore di Poynting.

Quindi un'onda elettromagnetica piana che trasporta un flusso di energia (mediata su di un ciclo) proporzionale alla densità di energia $\langle u\rangle$ e alla velocità di fase $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{k}}\frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}$

$$\langle\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{k}}\rangle = \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{k}}\,\langle u\rangle\ ,$$

trasporta anche una densità quantità di moto

$$\mathbf{g} = \frac{\epsilon_r\mu_r}{c^2}\,\mathbf{S} = \frac{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}{c}\,\hat{\mathbf{k}}\,\langle u\rangle\ .$$

La quantità di moto trasferita (in un tempo Δt) ad una superficie unitaria posta perpendicolarmente al vettore d'onda e che assorba tutta l'onda incidente (nel vuoto, $\epsilon_r = \mu_r = 1$)

$$\langle\Delta\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{k}}\rangle = \frac{\langle\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{k}}\rangle}{c^2} = c\Delta t = \frac{I}{c}\Delta t$$

definisce la pressione di radiazione (per mezzi completamente assorbenti) come

$$\text{pressione di radiazione} = \frac{I}{c}.$$

appendice

Dimostrazione dell'identità vettoriale (21).

$$\Big[\ \mathbf{E}\ (\nabla\cdot\mathbf{D}) - \mathbf{D}\times(\nabla\times\mathbf{E})\Big]_\alpha =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial x_\alpha} - \mathbf{D}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial x_\alpha}\right] + \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[E_\alpha D_\beta - \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\,\delta_{\alpha\beta}\right]\ .$$

Sviluppiamo i prodotti vettoriali usando il tensore di Ricci totalmente antisimmetrico

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} +1 \text{ se } \alpha\beta\gamma \text{ è una permutazione pari} \\ -1 \text{ se } \alpha\beta\gamma \text{ è una permutazione dispari} \\ \ \ 0 \text{ se due indici sono uguali} \end{cases} .$$

Ricordiamo che una permutazione è pari se ottenuta dalla disposizione fondamentale $[\alpha = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = 3]$ attraverso un numero pari di scambi di due indici, dispari se il numero di scambi è dispari. Le sole permutazioni pari sono dunque [123], [312], [231], ovvero quelle ottenute attraverso una rotazione ciclica degli indici a partire dalla fondamentale. Dispari quelle ottenute dalle pari attraverso lo scambio di due indici[2]

Vale la proprietà

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\lambda\mu} = \delta_{\beta\lambda}\delta_{\gamma\mu} - \delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\lambda}\ ,$$

sempre dovuta al fatto che (fissato un indice nei due tensori (in questo caso α) i restanti debbono essere entrambi diversi da α (quindi diversi tra di loro) ed il prodotto è positivo (+1) se entrambe le disposizione sono o pari o dispari. Ovviamente $\delta_{\alpha\beta} = +1$ se $\alpha = \beta$, $\delta_{\alpha\beta} = 0$ se $\alpha \neq \beta$. La relazione precedente conduce immediatamente al calcolo di un doppio prodotto vettoriale

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A}\times\mathbf{B}\times\mathbf{C}]_\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma}A_\beta[\mathbf{B}\times\mathbf{C}]_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\gamma\lambda\mu}A_\beta B_\lambda C_\mu = \\
&= \epsilon_{\gamma\alpha\beta}\epsilon_{\gamma\lambda\mu}A_\beta B_\lambda C_\mu \\
&= (\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda})A_\beta B_\lambda C_\mu = \\
&= B_\alpha(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - C_\alpha(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})
\end{aligned}$$

[2] Con l'uso di questo tensore il prodotto vettoriale $\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{B}$ può essere scritto per le singole componenti $C_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}A_\beta B_\gamma$ dove si sottintendente una somma sugli indici ripetuti β, γ, ovvero $C_\alpha = \sum_\beta\sum_\gamma \epsilon_{\alpha\beta\gamma}A_\beta B_\gamma$. Quindi se si vuole trovare (ad esempio) $C_x \equiv C_1$, questo risulta $C_1 = \epsilon_{1\alpha\beta}A_\beta B_\gamma$ ed i soli termini diversi da zero nella somma sono quelli in cui $\beta = 2$ e $\gamma = 3$ o $\beta = 3$ e $\gamma = 2$. Quindi $C_1 = \epsilon_{123}A_2B_3 + \epsilon_{132}A_3B_2 = A_yB_z - A_zB_y$, come noto.

ovvero

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C}] = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

come noto.

Si ha dunque

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{E}\ (\nabla \cdot \mathbf{D}) - \mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E})]_\alpha = \\
= \quad & \left[E_\alpha \frac{\partial D_\beta}{\partial x_\beta} - \epsilon_{\alpha\beta\gamma} D_\beta (\nabla \times \mathbf{E})_\gamma\right] = \\
= \quad & \left[E_\alpha \frac{\partial D_\beta}{\partial x_\beta} - \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\gamma\lambda\mu} D_\beta \frac{\partial}{\partial x_\lambda} E_\mu\right] = \\
= \quad & \left[E_\alpha \frac{\partial D_\beta}{\partial x_\beta} - \epsilon_{\gamma\alpha\beta}\epsilon_{\gamma\lambda\mu} D_\beta \frac{\partial}{\partial x_\lambda} E_\mu\right] = \\
= \quad & \left[E_\alpha \frac{\partial D_\beta}{\partial x_\beta} - (\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda}) D_\beta \frac{\partial}{\partial x_\lambda} E_\mu\right] = \\
= \quad & \left[E_\alpha \frac{\partial D_\beta}{\partial x_\beta} - D_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} E_\beta + D_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} E_\alpha\right] = \\
= \quad & \left[\frac{\partial}{\partial x_\beta}(E_\alpha\, D_\beta) - D_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} E_\beta\right] = \\
= \quad & \frac{\partial}{\partial x_\beta}(E_\alpha\, D_\beta) - \mathbf{D} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \mathbf{E} = \\
= \quad & \frac{\partial}{\partial x_\beta}(E_\alpha\, D_\beta) + \left(\frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\mathbf{D} - \frac{1}{2}\mathbf{D} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\mathbf{E}\right) + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\mathbf{D} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\mathbf{E} - \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\mathbf{D}\right)}_{\substack{-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\beta}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}\delta_{\alpha\beta})}} = \\
= \quad & \frac{1}{2}\left[\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x_\alpha} - \mathbf{D} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_\alpha}\right] + \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[E_\alpha D_\beta - \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}\,\delta_{\alpha\beta}\right]\ .
\end{aligned}$$

q.e.d.