Equazioni di Maxwell

I campi elettrici e magnetici (nel vuoto) sono descritti dalle equazioni di Maxwell (in unità MKSA)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\varrho}{\epsilon_0} && (1) \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && (2) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && (3) \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} && (4) \end{aligned}$$

La forza che agisce su di una carica (puntiforme) che si muove con velocità $\mathbf{v}$ è data dalla forza di Lorentz[1]

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \ . \tag{5}$$

Si noti che tutte le quantità coinvolte (eccetto le costanti dovute all'uso delle unità di misura) sono dipendenti dallo spazio e dal tempo (esempio $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ etc..).

In presenza di materia, le stesse equazioni possono essere scritte

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \varrho_{\mathrm{lib}} && (6) \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && (7) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && (8) \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j}_{\mathrm{lib}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} && (9) \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} && (10) \\ \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \ . && (11) \\ & && (12) \end{aligned}$$

[1] si suppone che la presenza della carica q *di prova* non alteri apprezzabilmente i campi esterni $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$

Le precedenti equazioni possono essere semplificate nei casi in cui esista una relazione semplice tra i vettori Polarizzazione **P** e Magnetizzazione **M** ed il campo elettrico **E** e campo **H**, rispettivamente. Ad esempio, nel caso di materiali omogenei ed isotropi non ferromagnetici

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \approx \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi^e \mathbf{E} = \\ &= \epsilon_0 (1 + \chi^e) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \approx \mu_0 (\mathbf{H} + \chi^m \mathbf{H}) = \\ &= \mu_0 (1 + \chi^m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \ . \end{aligned} \tag{14}$$

Si noti che si è supposta una relazione lineare tra i vettori **D** ed **E** e **B** ed **H**, che sarà valida solo per deboli campi (quando gli effetti dipendenti da potenze più elevate dei campi inducenti negli sviluppi

$$\begin{aligned} P_\alpha(\mathbf{E}) &= P_\alpha(\mathbf{E}=0) + \sum_\beta \left. \frac{\partial P_\alpha}{\partial E_\beta} \right|_{\mathbf{E}=0} E_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\beta\gamma} \left. \frac{\partial^2 P_\alpha}{\partial E_\beta \partial E_\gamma} \right|_{\mathbf{E}=0} E_\beta E_\gamma + ... \\ M_\alpha(\mathbf{H}) &= M_\alpha(\mathbf{H}=0) + \sum_\beta \left. \frac{\partial M_\alpha}{\partial H_\beta} \right|_{\mathbf{H}=0} H_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\beta\gamma} \left. \frac{\partial^2 M_\alpha}{\partial H_\beta \partial H_\gamma} \right|_{\mathbf{H}=0} H_\beta H_\gamma + ... \end{aligned}$$

possono essere trascurati). Imoltre si noti che, pur supponendo di restringersi all'ordine più basso, cioè ad una relazione lineare, tale relazione potrebbe essere scritta attraverso un tensore di rango 2, includendo così il caso di mezzi non isotropi. La relazione tra le componenti è quindi scrivibile (per materiali non ferromagnetici, perciò con magnetizzazione residua nulla e non "elettreti", cioè con polarizzazione residua nulla)

$$\begin{aligned} P_\alpha / \epsilon_0 &= \sum_\beta \chi^e_{\alpha\beta} E_\beta = \chi^e_{\alpha\beta} E_\beta \ , \\ M_\alpha &= \sum_\beta \chi^m_{\alpha\beta} H_\beta = \chi^m_{\alpha\beta} H_\beta \ , \end{aligned}$$

avendo utilizzato la convenzione di implicita somma su indici ripetuti.

Elettrodinamica nel vuoto

Riprendiamo il caso delle equazioni di Maxwell nel vuoto. I campi elettrici e magnetici possono essere espressi in funzione di opportuni potenziali: scalare

(φ) e vettore ($\mathbf{A}$) tali che[2]

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &(15)\\
\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \ . &(16)
\end{aligned}$$

È facile verificare che i potenziali così definiti non sono unicamente determinati. Potenziali che differiscono da questi in modo opportuno (vengano *trasformati* attraverso opportune trasformazioni dette di Gauge), producono gli stessi campi elettrici e magnetici. Così i potenziali ottenuti dai precedenti tramite l'aggiunta di gradiente e derivata temporale di una funzione scalare χ

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla\chi \ , \\
\varphi' &= \varphi - \frac{\partial \chi}{\partial t} &(17)
\end{aligned}$$

godono della proprietà di essere potenziali degli stessi campi

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}' &= -\nabla\varphi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = \\
&= -\nabla\varphi + \nabla\frac{\partial \chi}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\chi = \\
&= -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E} \\
\mathbf{B}' &= \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla\chi) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \ .
\end{aligned}$$

Ricordando che vale l'identità vettoriale

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{C}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{C}) - \nabla^2 \mathbf{C} \ , \tag{18}$$

dalle equazioni di Maxwell si possono ricavare delle equazioni differenziali di secondo ordine per i potenziali. Si ha (da (1) e (4))

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(-\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\nabla^2\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{A} = \varrho/\epsilon_0 \tag{19}$$

[2]Dall'eqiazione di Maxwell $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ si deduce, in virtù della (16) che : $\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$, quindi si potrà sempre scrivere $\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = -\nabla\varphi$ da cui la (15).

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{B} &= \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \\
&= \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) \quad ; \qquad (20)
\end{aligned}
$$

ovvero sommando e sottraendo all'equazione (19) il termine $\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ e rimaneggiando l'equazione (20)

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 \varphi &- \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\varrho}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right] \quad ; \\
\nabla^2 \mathbf{A} &- \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} + \nabla\left[\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right] \quad .
\end{aligned}
$$

Queste sono equazioni differenziali accoppiate, ma possono essere fortemente semplificate se si sfrutta la libertà nella definizione dei potenziali. In particolare il rotore di $\mathbf{A}$ è definito dalla (16), ma la sua divergenza può essere definita in modo arbitrario. Se la si fissa in modo che

$$
\left[\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right] = 0 \qquad (21)
$$

le due equazioni differenziali possono essere disaccoppiate e risultano

$$
\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad ; \qquad (22)
$$

$$
\nabla^2 \varphi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\varrho}{\epsilon_0} \quad ; \qquad (23)
$$

Osservazioni

i) Le equazioni (22) (23), generalizzano, al caso dipendente dal tempo, le equazioni di Poisson note in statica

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{j} \quad , \\
\nabla^2 \varphi &= -\frac{\varrho}{\epsilon_0} \quad ,
\end{aligned}
$$

ed aventi soluzioni (per distribuzioni di cariche e correnti limitate nello spazio) le note espressioni

$$
\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{r}_1) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{r}_2 \frac{\varrho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_{12}|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\varrho(\mathbf{r}_2) dV_2}{|\mathbf{r}_{12}|} \quad ; \\
\mathbf{A}(\mathbf{r}_1) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}_2 \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_{12}|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_2) dV_2}{|\mathbf{r}_{12}|} \quad . \qquad (24)
\end{aligned}
$$

ii) Aver imposto alla divergenza del potenziale vettore **A** la condizione (21), restringe l'arbitrarietà delle funzioni χ nelle trasformazioni di gauge (17), che ora devono soddisfare alla

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla\chi) + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi - \frac{\partial\chi}{\partial t}\right) = 0 \tag{25}$$

ovvero, dato che deve valere $\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_o\epsilon_0 \partial\varphi/\partial t = 0$, la classe delle funzioni χ deve essere ristretta alla classe delle soluzioni dell'equazione

$$\nabla^2\chi - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0 \ . \tag{26}$$

iii) L'operatore

$$\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

è ricorrente in tutte le equazioni rendendole simili tra loro.

iv) Nele zone lontane dalle cariche e dalle sorgenti, dove

$$\begin{cases} \mathbf{j} = 0 \ , \\ \quad \text{e} \\ \varrho = 0 \ , \end{cases} \tag{27}$$

le equazioni assumono una forma omogenea, cioè

$$\nabla^2\mathbf{A} \quad - \quad \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \ ; \tag{28}$$

$$\nabla^2\varphi \quad - \quad \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \ ; \tag{29}$$

e si può dimostrare che **anche** il campo elettrico e magnetico obbediscono alla stessa equazione. Per la dimostrazione occorre restringersi alle equazioni di Maxwell nelle zone lontane dalle sorgenti dove valgono le (27). Si ha così

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{30}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{31}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{32}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = +\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{33}$$

che assumono una forma particolarmente simmetrica. Queste equazioni possono essere disaccoppiate calcolando il $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}$ e l'analogo $\nabla \times \nabla \times \mathbf{B}$ (si ricorda che vale la (18), otteniamo le equazioni

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} &- \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \ ; && (34) \\ \nabla^2 \mathbf{B} &- \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \ ; && (35) \end{aligned}$$

ancora una volta la stessa forma... Si deve però notare che tra tutte le soluzioni delle **sei** indipendenti equazioni (34), (35), per E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z, occorrerà scegliere quelle che obbediscono alle equazioni di Maxwell (30)-(33).

vi) Da ultimo osserviamo che le equazioni di Maxwell sono state ricavate per deboli variazioni nel tempo delle correnti, occorrerà verificare che valgano anche per sorgenti e campi rapidamente variabili col tempo.

Equazione delle onde

Occorrerà studiare l'equazione

$$\nabla^2 \eta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \ ; \tag{36}$$

comune a tutte le equazioni trovate. v^2 è un parametro reale e positivo (perché tale è la combinazione $\mu_0 \epsilon_0$) dalle dimensioni di una velocità al quadrato. Restringiamoci (per semplicità) all'equazione unidimensionale

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta(x,t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \eta(x,t) = 0 \ . \tag{37}$$

La precedente equazione ammette come soluzioni funzioni delle variabili $\xi = x - vt$ e $\lambda = x + vt$, che sono combinazioni specifiche di x e t,

$$\eta(x,t) = f(x - vt) \quad \text{ovvero} \quad \eta(x,t) = g(x + vt) \ . \tag{38}$$

Infatti è facile verificare che

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{d}{d\xi} = \frac{d}{d\lambda} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= -v \frac{d}{d\xi} = +v \frac{d}{d\lambda} && (39) \end{aligned}$$

da cui la dimostrazione che sia $f(x-vt)$ che $g(x+vt)$ sono soluzioni della (37), ovvero che la soluzione generale può essere scritta come combinazione lineare delle due

$$\eta(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt) \ , \tag{40}$$

che rappresenta la combinazione di due onde: l'una ($f(x-vt)$) viaggiante nel verso positivo dell'asse x e l'altra ($g(x+vt)$) nel verso negativo delle x. Si noti che per $t=0$, $\eta(x,t=0) = f(x)+g(x)$

Onde trasversali su una corda tesa

L'equazione (37) può descrivere il moto di una perturbazione (trasversale rispetto alla direzione del moto) su una corda omogenea e tesa, inestensibile. Si può dimostrare che in questo caso

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{41}$$

dove T è la forza di tensione della corda e μ la sua massa per unità di lunghezza.

Infatti se si prende un elemento di corda compreso tra x ed $x+dx$, la forza a cui questo elemento è sottoposto (dato che la tensione T della corda è identica su tutta la corda per l'ipotesi di inestensibilità) risulta

$$\begin{aligned} dF_x &= T_x(x+dx) - T_x(x) = T(\cos\vartheta' - \cos\vartheta) \ , \\ dF_y &= T_y(x+dx) - T_y(x) = T(\sin\vartheta' - \sin\vartheta) \ , \end{aligned} \tag{42}$$

dove ϑ e ϑ' sono gli angoli formati dalla tensione T (sempre tangente alla corda) con la parallela all'asse x nei punti $(x, y=\eta(x))$ e $(x+dx, y=\eta(x+dx))$. La lunghezza dell'elemento di corda tra i due suddetti punti e l'elemento di massa, risultano

$$dl = \sqrt{dx^2+dy^2} = dx\sqrt{1+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2} \approx dx \ ; \quad \Rightarrow \quad dm = \mu\, dl \approx \mu\, dx \ ,$$

trascurando ordini superiori nella deformazione. Allo stesso ordine $\cos\vartheta = \cos\vartheta' \approx 1$ e $\sin\vartheta \approx \tan\vartheta = \frac{\partial\eta}{\partial x}\Big|_x$, $\sin\vartheta' \approx \tan\vartheta' = \frac{\partial\eta}{\partial x}\Big|_{x+dx}$ [3]. In conclusione

[3] Si noti che $\cos\vartheta = 1/\sqrt{1+\tan^2\vartheta} = 1/\sqrt{1+(\partial\eta/\partial x)^2} \approx 1$, $\sin\vartheta = \tan\vartheta/\sqrt{1+\tan^2\vartheta} = \tan\vartheta/\sqrt{1+(\partial\eta/\partial x)^2} \approx \tan\vartheta$. Analogamente per ϑ'.

dalle (42)

$$
\begin{aligned}
dF_x &\approx 0 \, , \\
dF_y &= T(\sin\vartheta' - \sin\vartheta) \approx T(\tan\vartheta' - \tan\vartheta) = \\
&= T\left(\left.\frac{\partial\eta}{\partial x}\right|_{x+dx} - \left.\frac{\partial\eta}{\partial x}\right|_{x} \right) = T\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\,dx \, ,
\end{aligned}
$$

ed il moto è esclusivamente trasverso secondo la legge

$$dF_y = dm\,\ddot{y} \quad \Rightarrow T\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\,dx = \mu\,dx\,\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} \, ,$$

ovvero

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T}\,\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = 0 \, .$$

Onde armoniche (o sinusoidali) su di una corda

Illustriamo le considerazioni ed i risultati generali precedenti esaminando il caso delle onde armoniche su di una corda, ad esempio un'onda progressiva

$$\eta(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta) = A\cos[k(x - vt + \delta/k)] \, . \tag{43}$$

Se la si esamina ad un tempo fissato $t = t^*$ (ad esempio a $t = 0$), si nota che A è la sua ampiezza, mentre l'argomento del coseno è detta fase. k è chiamato **numero d'onda** ed è evidentemente legato alla **lunghezza d'onda**, cioè quella lunghezza minima che permette al coseno un ciclo completo (poi l'onda si ripete ad intervalli regolari)

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \, .$$

Se ora lasciamo scorrere il tempo, l'intero treno d'onda procede da sinisra verso destra (abbiamo scelto un esempio illustrativo di onda progressiva) ed **ogni punto fissato in x**, vibra sù e giù ed esegue un ciclo completo dopo un tempo T detto **periodo**

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{kv} \, ,$$

con **frequenza** (cioè numero di oscillazioni per unità di tempo)

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{kv}{2\pi} = \frac{v}{\lambda}\ ; \qquad \Rightarrow \quad \lambda\nu = v\ .$$

Un'onda viaggiante nel verso opposto può essere ottenuta (dato che il coseno è una funzione pari) formalmente cambiando il segno di k:

$$\eta(x,t) = A\cos(-kx-\omega t+\delta) = A\cos[-k(x+vt-\delta/k)] = A\cos[k(x+vt-\delta/k)]\ .$$

Questo non sugnifica che λ e ω siano negativi; lunghezza d'onda e frequenza sono *sempre positivi*; quindi deve essere $\lambda = 2\pi/|k|$, $\omega = |k|v$, già prefigurando che k ìn realtà un vettore e lunghezza d'onda e frequenza sono legate al suo modulo (come si vedrà meglio in seguito).

Notazione complessa

Data la formula di Eulero

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

l'onda sinusoidale potrebbe essere scritta

$$\eta(x,t) = \Re[Ae^{i(kx-\omega t+\delta)}]\ ,$$

dove $\Re(c)$ denota la parte reale del numero complesso c. Questo spunto suggerisce di passare alla notazione complessa

$$\tilde{\eta}(x,t) \equiv \tilde{A}e^{i(kx-\omega t)}\ ,$$

dove l'ampiezza (generalmente) complessa $\tilde{A} = Ae^{i\delta}$ assorbe la costante di fase δ. La funzione **fisica** resta la parte reale:

$$\eta(x,t) = \Re[\tilde{\eta}(x,t)]\ .$$

Nel seguito non si distinguerà tra i simboli $\tilde{\eta}$ ed η, resta sottointeso che la fisica è contenuta nella parte reale. La notazione complessa è troppo comoda per non essere utilizzata.... per convincersene si faccia il seguente esercizio: si combinino due onde sinusoidali della stessa frequenza e lunghezza d'onda usando la notazione complessa ed usando la notazione tradizionale:

$$\eta(x,t) = A\cos(kx-\omega t+\delta) = \eta_1(x,t) + \eta_2(x,t)\ ,$$

con $\eta_1 = A_1 \cos(kx - \omega t + \delta_1)$ e $\eta_2(x,t) = A_2 \cos(kx - \omega t + \delta_2)$.

---

nota importante
Sebbene l'onda sinusoidale sia una forma molto speciale dell'onda $\eta(x,t)$, il punto cruciale è che **una qualsiasi onda** può essere espressa come combinazione lineare di onde armoniche:

$$\tilde{\eta}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(k)\, e^{i(kx-\omega t)}\, dk \ , \tag{44}$$

dove ω è funzione di k ($\omega = kv$, per la corda) e k assume valori anche negativi per permettere la combinazione di onde viaggianti in entrambe le direzioni. Si noti che $\tilde{A}(k)$ è legato a $\tilde{\eta}(x, t = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(k)\, e^{ikx}\, dk$. La teoria sottostante prende il nome di trasformate di Fourier. Se ne discuteranno alcuni aspetti durante il corso.

Onde stazionarie

Soluzioni interessanti dell'equazione unidimensionali possono essere cercate separando la dipendenza di $\xi = x - vt$ e $\lambda = x + vt$ da x e da t. Queste soluzioni hanno la forma

$$\eta(x,t) = X(x)\, F(t) \ , \tag{45}$$

dove X e F sono funzioni unicamente di x e di t, separatamente. Quindi

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = F(t) \frac{d^2 X}{dx^2} \ , \qquad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = X(x) \frac{d^2 F}{dt^2} \ .$$

Dalla (37) si ottiene

$$\frac{v^2}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dt^2} \ . \tag{46}$$

Il primo membro non dipende da t, il secondo non dipende da x, la loro uguaglianza implica dunque che siano uguali ad una costante. Se si denota con $-\omega^2$ tale costante, si ottengono una coppia di equazioni differenziali armoniche

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F}{dt^2} &= -\omega^2 F \\ \frac{d^2 X}{dx^2} &= -\frac{\omega^2}{v^2} X = -k^2 X \ , \end{aligned} \tag{47}$$

con $k = \omega/v$ come nelle onde armoniche "viaggianti".
Le soluzioni sono del tipo

$$\begin{aligned}
\eta(x,t) &= A \sin kx \, \cos(\omega t + \varphi) \\
\eta(x,t) &= A \cos kx \, \cos(\omega t + \varphi) \\
\eta(x,t) &= A \sin kx \, \sin(\omega t + \varphi) \\
\eta(x,t) &= A \cos kx \, \cos(\omega t + \varphi) \ ,
\end{aligned}$$

Per il principio di sovrapposizione, la soluzione generale è una combinazione lineare delle quattro e si può esperimere nella forma

$$\eta(x,t) = A \cos kx \, \cos(\omega t + \alpha) + B \sin kx \, \sin(\omega t + \beta) \tag{48}$$

con opportune definizioni di A, B, α e β. Osservazione importante: per $B = \pm A$ si ottiene l'onda armonica "viaggiante"

$$\eta(x,t) = A \cos(kx \pm \omega t) \ ;$$

cioè onde viaggianti possono essere costruite come sovrapposizione di onde stazionarie e viceversa (basta pensare alla sovrapposizione di onde del tipo $A\cos(kx - \omega t)$ e $\pm A\cos(kx + \omega t)$). Questa fatto è conseguenza delle proprietà di linearità dell'equazione delle onde e suggerisce che una generica soluzione possa essere espressa sia in termini di onde viaggianti che onde stazionarie. Le onde stazionarie sono particolarmente utili quando le onde debbono soddisfare specifiche condizioni al contorno (alcune saranno discusse negli esercizi).