Esercizi

Riflessione e trasmissione: condizioni al contorno

1.

Immaginiamo che una lunga corda sia "saldata" nel punto $x = 0$ ad un'altra corda. La tensione T della corda è la stessa in tutti i punti, ma la massa per unità di lunghezza non lo sia in modo tale che le velocità delle onde che vi si propagano sono diverse: v_1 e v_2. Immaginiamo che una certa onda incidente abbia forma $g_I(x, v_1 t)$ e dia quindi luogo ad un'onda trasmessa $g_T(x - v_2 t)$ ed una riflessa $h_R(x + v_1 t)$. Per continuità della corda deve accadere che

$$f(0^-, t) = f(0^+, t) \ , \tag{1}$$

altrimenti la corda manifesterebbe una frattura, inoltre se il nodo che le collega ha massa trascurabile deve anche valere

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{0^-} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{0^+} \tag{2}$$

altrimenti ci sarebbe una forza netta sul nodo (le due tensioni non si compensano perché non giacciono sulla stessa retta tangente...) ed una accelerazione infinita...[1]

Imponendo le condizioni al contorno sopra ricordate, trovare h_R e g_T, conoscendo g_I.

soluzione:

Applicando le condizioni al contorno a $x = 0$, si ottiene:

$$\begin{aligned} g_I(-v_1 t) + h_R(v_1 t) &= g_T(-v_2 t) \ , & (3) \\ \frac{\partial g_I}{\partial x}(-v_1 t) + \frac{\partial h_R}{\partial x}(v_1 t) &= \frac{\partial g_T}{\partial x}(-v_2 t) \quad \text{per } x = 0 \ ; & (4) \end{aligned}$$

Possiamo ora cercare quali condizioni la (4) impone sulle funzioni $g_{I,T}$ ed h_R notando che per

$$\begin{aligned} & g \equiv g_I \ , \quad g_T \ , \quad h_R \ , \\ e \quad & \xi \equiv x - v_1 t \ , \quad x + v_1 t \ , \quad x - v_2 t \ . \end{aligned}$$

[1] Le stesse condizioni al contorno valgono sia se si considera l'onda reale che la sua espressione complessa.

si ha:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \qquad \text{e} \ \ \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} \ ; \quad \text{si ha} \ :$$

$$\frac{\partial g}{\partial \xi} = \frac{\partial g}{\partial t} \cdot \left[\frac{\partial \xi}{\partial t}\right]^{-1} \qquad \text{e quindi} \ :$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial t} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \left[\frac{\partial \xi}{\partial t}\right]^{-1} \quad .$$

Poiché:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 1 \quad \text{per tutte le funzioni} \ ,$$

$$e \quad \frac{\partial g}{\partial t} = -v_1 \ , \quad +v_1 \ , \quad -v_2 \ ,$$

l'equazione (4) diviene

$$\frac{\partial g_I(-v_1 t)}{\partial t}\left(-\frac{1}{v_1}\right) + \frac{\partial h_R(v_1 t)}{\partial t}\left(+\frac{1}{v_1}\right) = \frac{\partial g_T(-v_2 t)}{\partial t}\left(-\frac{1}{v_2}\right) \ . \tag{5}$$

Moltiplicando per $(-v_1)$ ed integrando sul tempo:

$$g_I(-v_1 t) - h_R(v_1 t) = \frac{v_1}{v_2} g_T(-v_2 t) + \ costante \tag{6}$$

Sommando (3) e (6)

$$g_T(-v_2 t) = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} g_I(-v_1 t) + \ costante \ ;$$

e, dato che g_T è una funzione di $x - v_2 t$,

$$g_T(x - v_2 t) = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} g_I\left(\frac{v_1}{v_2} x - v_1 t\right) + \ costante \ . \tag{7}$$

h_R può essere calcolata sottraendo dalla (3) il contributo della (6) moltiplicato per $-\frac{v_2}{v_1}$. Si ricava:

$$h_R(x + v_1 t) = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} \cdot g_I(-x - v_1 t) + C \ . \tag{8}$$

Le costanti si fissano con le condizione (3) a $t = 0$ (ad esempio). I risultati rilevanti sono espressi nelle (7), (8).

esempio:
Assumiamo:

$$\begin{aligned}
g_I(x,t) &= A_I\, e^{i(k_1 x - \omega t)}\ , \qquad (\text{per}\ \ x < 0)\ ; \qquad (9)\\
h_R(x,t) &= A_R\, e^{i(-k_1 x - \omega t)}\ , \quad (\text{per}\ \ x < 0)\ ; \qquad (10)\\
g_T(x,t) &= A_T\, e^{i(k_2 x - \omega t)}\ , \qquad (\text{per}\ \ x > 0)\ ; \qquad (11)
\end{aligned}$$

e tutte le parti della corda oscillano alla stessa frequenza fissata a $-\infty$ dal sistema che crea l'oscillazione. Le lunghezze d'onda, invece, sono diverse perché diverse sono le velocità

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{v_1}{v_2}\ .$$

Le condizioni al contorno (1) e (2) fissano

$$A_I + A_R = A_T\ ; \qquad k_1\,(A_I - A_R) = k_2\, A_T\ ;$$

da cui

$$\begin{aligned}
A_R &= \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right) A_I\ ; \qquad A_T = \left(\frac{2\,k_1}{k_1 + k_2}\right) A_I\ ;\\
&\text{ovvero}\\
A_R &= \left(\frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}\right) A_I\ ; \qquad A_T = \left(\frac{2\,v_2}{v_1 + v_2}\right) A_I\ .
\end{aligned}$$

Ricordando che $A_{(I,R,T)} = |A_{(I,R,T)}|\, e^{i\delta_{(I,R,T)}}$, le fasi devono essere da rispettare le condizioni imposte dalle due possibilità: i) $v_2 > v_1$ e ii) $v_2 < v_1$; in pratica per la condizione i) $\delta_R = \delta_T = \delta_I$; per la condizione ii) $\delta_R = \delta_I - \pi$, $\delta_T = \delta_I$). In particolare se la corda per $x > 0$ è infinitamente pesante ($\mu_2 \to \infty$, $v_2 \to zero$) e quindi è bloccata in $x = 0$, si trova

$$A_T = 0\ ; \quad \text{e}\ \ A_R = -A_I\ ;$$

l'onda riflessa è semplicemete rovesciata