Esercizi

Corda pizzicata e fissata agli estremi

Immaginiamo che una corda sia fissata nel punto $x = 0$ ed $x = L$, e che a $t = 0$ abbia la configurazione $(0 < x_0 < L)$:
$y(0,t) = 0$, $y(L,t) = 0$, $y_t(x,0) = \frac{\partial}{\partial t} y(x,t)\Big|_{t=0} = 0$, $|y(x,t)| \leq A$.

$$y(x,0) = f(x) = \begin{cases} Ax/x_0 & \text{per} \quad 0 \leq x \leq x_0 \\ A(L-x)/(L-x_0) & \text{per} \quad x_0 \leq x \leq L \end{cases} , \tag{1}$$

(vedi figura (1) dove $L = 2$, $x_0 = 1.34567$, $A = 0.2$ (unità arbitrarie)).
Trovare il moto della corda per $t > 0$.

Il problema si risolve attraverso l'analisi in serie di Fourier.

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi x}{\lambda} n \, \cos \frac{2\pi v t}{\lambda} n \ ,$$

e quindi

$$y(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi x}{\lambda} n \ . \tag{2}$$

Per la teoria delle serie di Fourier

$$b_n = \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{+\lambda/2} f(x) \, \sin \frac{2\pi x}{\lambda} n \tag{3}$$

ed in conclusione

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{+\lambda/2} f(x) \, \sin \frac{2\pi x}{\lambda} n \right) \sin \frac{2\pi x}{\lambda} n \, \cos \frac{2\pi v t}{\lambda} n \ ,$$

e si può verificare che è proprio la soluzione.
I termini della serie rappresentano i *modi normali di vibrazione*.
Sviluppiamo gli integrali (3) rendendo periodica (per chiarezza) la funzione $f(x)$ nell'intervallo $-\lambda/2 = -L \leq x \leq +\lambda/2 = +L$ e quindi $\lambda = 2\,L$:

$$y(x,0) = f(x) = \begin{cases} A(-L-x)/(L-x_0) & \text{per} \quad -L \leq x \leq -x_0 \\ Ax/x_0 & \text{per} \quad -x_0 \leq x \leq +x_0 \\ A(L-x)/(L-x_0) & \text{per} \quad +x_0 \leq x \leq +L \ , \end{cases}$$

ovvero (si note la sostituzione $\xi = \frac{n\pi}{L} x$):

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{A}{L} \left\{ \int_{-L}^{-x_0} \frac{(-L-x)}{(L-x_0)} \, \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \int_{-x_0}^{+x_0} \frac{x}{x_0} \, \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \right. \\ &+ \left. \int_{+x_0}^{+L} \frac{(L-x)}{(L-x_0)} \, \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right\} = \\ &= 2 \frac{A}{L} \frac{L^2}{(n\pi)^2} \left\{ \frac{1}{x_0} \int_0^{+n\pi x_0/L} \xi \, \sin \xi \, d\xi + \frac{1}{L-x_0} \int_{+n\pi x_0/L}^{+n\pi} (n\pi - \xi) \, \sin \xi \, d\xi \right\} = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\frac{A}{L}\frac{L^2}{(n\pi)^2}\left\{\frac{1}{x_0}\left[-\frac{n\pi}{L}x_0\cos\frac{n\pi}{L}x_0+\sin\frac{n\pi}{L}x_0\right]+\right.\\
&+ \left.\frac{1}{L-x_0}\left[n\pi\frac{L-x_0}{L}\cos\frac{n\pi}{L}x_0+\sin\frac{n\pi}{L}x_0\right]\right\}=\\
&= 2\frac{A}{(n\pi)^2}\frac{L^2}{x_0(L-x_0)}\sin\frac{n\pi}{L}x_0\ . \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Nel caso $x_0 = L/2$,

$$
b_n = 8\frac{A}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari} \\ (-1)^{\frac{n+3}{2}}\cdot 8\frac{A}{(n\pi)^2} & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases} \qquad (5)
$$

In figura (2) si mostra esplicitamente lo sviluppo per le prime 15 componenti della serie di Fourier e per un valore di $\frac{L}{2} < x_0 < L$ (precisamente $x_0 = 1.34567$), in figura (3) lo stesso sviluppo ma per $x_0 = \frac{L}{2}$. Nella tabella si mostrano i valori dei coefficienti b_n nei due casi: è evidente la diversa valorizzazione delle armoniche superiori (nel caso $x_0 = \frac{L}{2} = 1$ sono addirittura assenti le componenti pari).

	$x_0 = 1.34567$	$x_0 = L/2 = 1$
n	b_n	b_n
1	0.1576	0.1621
2	-0.0407	0
3	0.0012	-0.0180
4	0.0095	0
5	-0.0067	0.0065
6	0.0006	0
7	0.0030	-0.0033
8	-0.0027	0
9	0.0004	0.0020
10	0.0014	0
11	-0.0014	-0.0013
12	0.0003	0
13	0.0008	0.0010
14	-0.0009	0
15	0.0002	-0.0007

Tabella: *I primi 15 coefficienti della serie di Fourier per la corda pizzicata. Configurazione iniziale (1). La prima colonna si riferisce alla configurazione di Figura (2) ed eq.(4), la seconda colonna si riferisce al caso particolare di Figura (3) ed eq.(5), in cui la corda è pizzicata al centro. In entrambi i casi l'ampiezza è $A = 0.2$.*

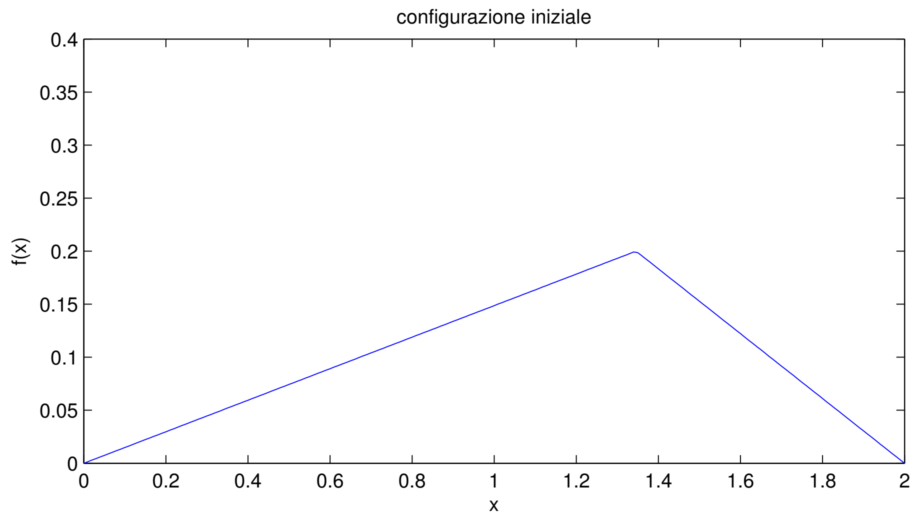

Figure 1: *Configurazione della corda a $t = 0$, vedi eq.(1).*

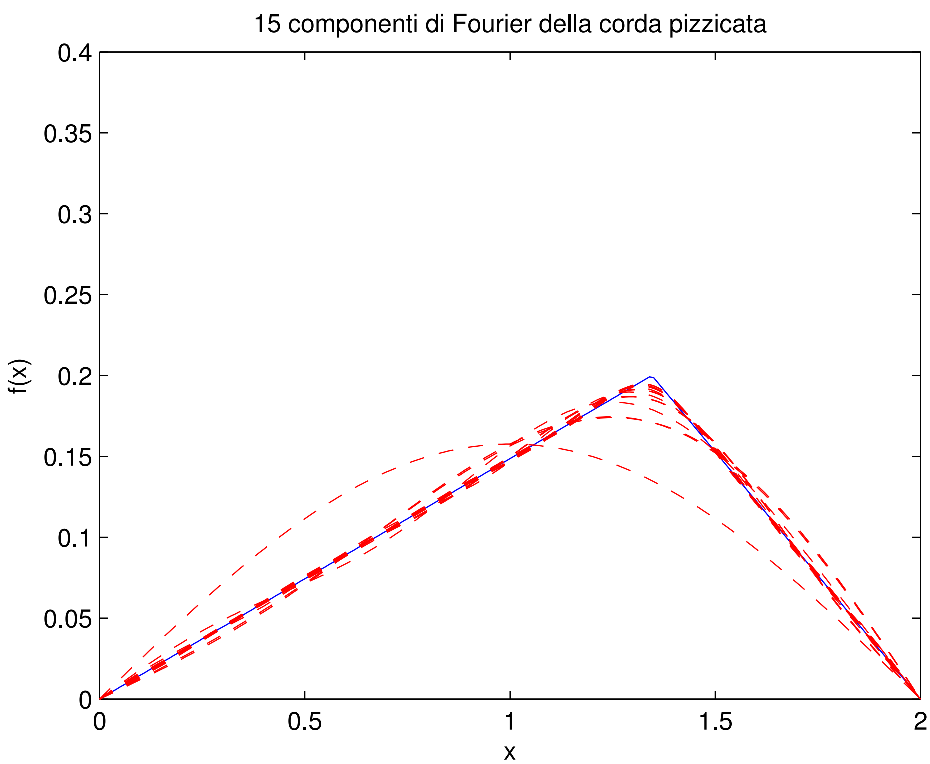

Figure 2: *Configurazione iniziale della corda sviluppata in serie di Fourier secondo l'eq.(2), contributo dei primi 15 coefficienti (vedi tabella).*

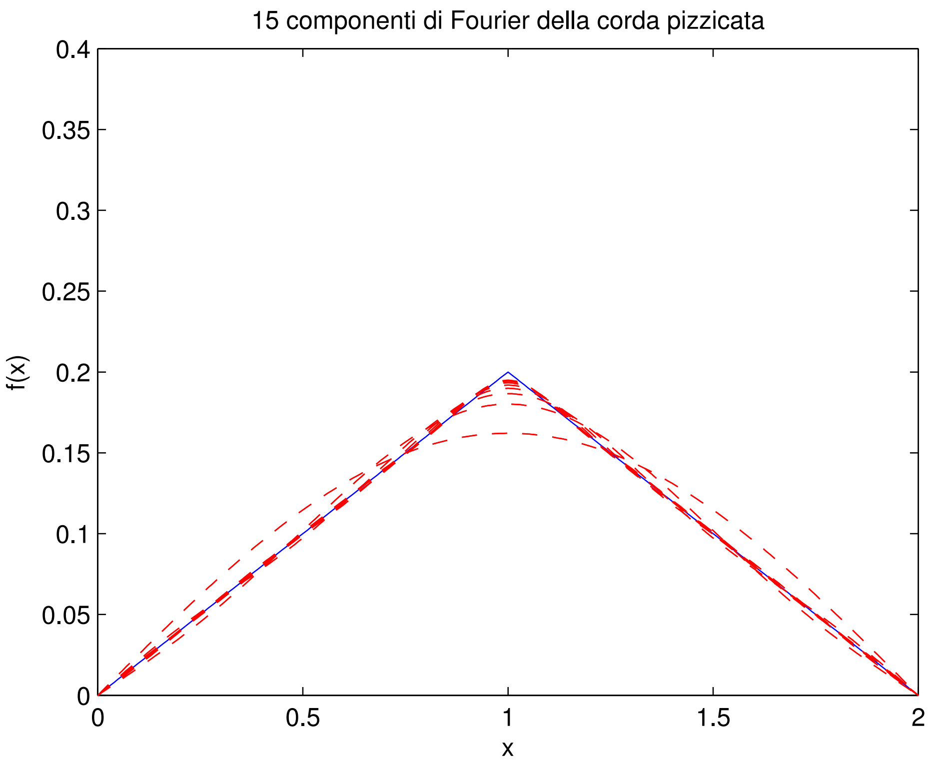

Figure 3: *Configurazione iniziale della corda pizzicata al centro e sviluppata in serie di Fourier secondo l'eq.(2), contributo dei primi 15 coefficienti (vedi tabella).*