Il dipolo irraggiante

Il dipolo irraggiante è un esempio di soluzione delle equazioni dei potenziali ritardati particolarmente utile in pratica. Le equazioni (nel vuoto)

$$\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0\mathbf{j} \\ \nabla^2\varphi - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\varrho}{\epsilon_0}\ ,\end{aligned} \tag{1}$$

ammettono come soluzione generale per sorgenti localizzate

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r_1},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV_2\,\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_2,t-r_{12}/c)}{r_{12}} \\ \varphi(\mathbf{r_1},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int dV_2\,\frac{\varrho(\mathbf{r}_2,t-r_{12}/c)}{r_{12}}\ .\end{aligned} \tag{2}$$

Per moti delle cariche con velocità molto più piccole della velocità della luce possiamo sostituire i ritardi con l'espressione più semplice $t-r_{12}/c \to t-r_1/c$, inoltre nelle zone lontane in cui $r_2 \ll r_1 = r$ gli integrali si semplificano in

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int dV_2\,\mathbf{j}(\mathbf{r}_2,t-r/c) \\ \varphi(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\int dV_2\,\varrho(\mathbf{r}_2,t-r/c)\ .\end{aligned} \tag{3}$$

Assumiamo ora che il tipo di distribuzione di carica e di corrente sia dovuto al moto di una distribuzione a carica totale nulla e con momento di dipolo variabile nel tempo e tale da produrre quindi una corrente (sia $t' = t - r/c$)

$$\begin{aligned}&\int \mathbf{j}(\mathbf{r}_2,t')\,dV_2 = \int \varrho(\mathbf{r}_2,t')\,\mathbf{v}_2(t')\,dV_2 = \\ &= \sum_i q_i\mathbf{v}_i(t') = \frac{d}{dt'}\sum_i q_i\mathbf{r}_i(t') = \\ &= \dot{\mathbf{p}}|_{t'=t-r/c}\ .\end{aligned} \tag{4}$$

In conclusione

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int dV_2\,\mathbf{j}(\mathbf{r}_2,t-r/c) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\mathbf{p}}|_{t'=t-r/c}}{r}\ . \tag{5}$$

Per determinare il campo magnetico prodotto occore calcolare $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, ricordando che $\mathbf{p} = \hat{z}\, p$ e quindi $\mathbf{A} = \hat{z}\, A_z$, mentre $A_x = A_y = 0$:

$$\begin{aligned}
B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = +\frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{y}{r}\left[\frac{\dot{p}|_{t'=t-r/c}}{r^2} + \frac{\ddot{p}|_{t'=t-r/c}}{cr}\right] \\
B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{x}{r}\left[\frac{\dot{p}|_{t'=t-r/c}}{r^2} + \frac{\ddot{p}|_{t'=t-r/c}}{cr}\right] \\
B_z &= 0\ ,
\end{aligned} \tag{6}$$

ed in notazione compatta

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\left[\dot{\mathbf{p}} + \frac{r}{c}\ddot{\mathbf{p}}\right]_{t'=t-r/c} \times \mathbf{r}}{r^3}\ . \tag{7}$$

Nel caso in cui si possano trascurare gli effetti dei ritardi ($r/c \to 0$), il campo magnetico si semplifica a quello noto dovuto ad un dipolo elettrico variabile nel tempo[1] ed il campo nelle prossimità del dipolo non risente degli effetti di ritardo:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\mathbf{p}}|_{t'=t} \times \mathbf{r}}{r^3}\ . \tag{8}$$

Il potenziale $\varphi(\mathbf{r}, t)$ può essere ricavato dalla condizione di Lorentz $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -c^2 \nabla \cdot \mathbf{A} = -c^2 \frac{\partial A_z}{\partial z} = -c^2 \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\dot{p}|_{t'=t-r/c}}{r} = \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{r}\frac{\left[\dot{p} + \frac{r}{c}\ddot{p}\right]_{t'=t-r/c}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\left[\dot{\mathbf{p}} + \frac{r}{c}\ddot{\mathbf{p}}\right]_{t'=t-r/c} \cdot \mathbf{r}}{r^3}\ ,
\end{aligned} \tag{9}$$

ovvero

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\left[\mathbf{p} + \frac{r}{c}\dot{\mathbf{p}}\right]_{t'=t-r/c} \cdot \mathbf{r}}{r^3}\ , \tag{10}$$

che si riduce al potenziale di dipolo noto trascurando i ritardi, ovvero nelle zone vicine al dipolo ($r/c \to 0$)

$$\varphi(\mathbf{r}, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}|_{t'=t} \cdot \mathbf{r}}{r^3}\ . \tag{11}$$

---

[1] Per un elemento di corrente $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} I\, \Delta\mathbf{l} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\, \dot{\mathbf{p}} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}$, dato che $I\, \Delta\mathbf{l} = \frac{d}{dt} q\, \Delta\mathbf{l} = \dot{\mathbf{p}}$

Il campo elettrico deve essere calcolato dai potenziali

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\left[-\mathbf{p}^\star + 3\frac{(\mathbf{p}^\star\cdot\mathbf{r})\;\mathbf{r}}{r^2} + \frac{1}{c^2}\left(\ddot{\mathbf{p}}\times\mathbf{r}\right)\times\mathbf{r}\right]_{t'=t-r/c}\quad , \qquad (12)
\end{aligned}$$

dove

$$\mathbf{p}^\star = \mathbf{p} + \frac{r}{c}\,\dot{\mathbf{p}}\ .$$

Ancora una volta, nelle zone in cui i ritardi possono essere trascurati, il campo si riduce a quello di un dipolo elettrico statico, ed il tempo è un puro parametro

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\left[-\mathbf{p} + 3\frac{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\;\mathbf{r}}{r^2}\right]_{t'=t}\quad . \qquad (13)$$

Nelle zone molto lontane dalle sorgenti (la cosiddetta zona delle onde) le espressioni per i campo elettrici e magnetici si semplificano notevolmente ed i termini che dipendono dall'inverso della distanza dominano, si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{c^2}\frac{\left(\ddot{\mathbf{p}}|_{t'=t-r/c}\times\hat{\mathbf{r}}\right)\times\hat{\mathbf{r}}}{r}\ , \\
\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{c^3}\frac{\ddot{\mathbf{p}}|_{t'=t-r/c}\times\hat{\mathbf{r}}}{r}\ . \qquad (14)
\end{aligned}$$

Queste soluzioni hanno le notevoli proprietà

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= |\mathbf{E}|\,\hat{\theta}\ , \\
\mathbf{B} &= |\mathbf{B}|\,\hat{\phi}\ , \\
|\mathbf{E}| &= c|\mathbf{B}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{p}|_{t'=t-r/c}}{r}\sin\theta\ , \qquad (15)
\end{aligned}$$

cioè: il campo elettrico e magnetico sono perpendicolari tra di loro e perpendicolari alla direzione di propagazione ($\hat{\mathbf{r}}$) ed il modulo del campo elettrico è c-volte quello del campo magnetico, cioè obbediscono alle proprietà delle onde piane nel vuoto.

potenza irraggiata

La potenza irraggiata nella zona delle onde è valutabile tramite il vettore di Poynting

$$\langle \mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{r}}\rangle = \frac{1}{\mu_0}\langle(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\,\hat{\mathbf{r}}\rangle = \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\right]^2 \frac{1}{c}\langle\left[\frac{\ddot{p}|_{t'=t-r/c}}{r}\sin\theta\right]^2\rangle \tag{16}$$

e la potenza irraggiata su tutto l'angolo solido risulta

$$\begin{aligned}
\int \langle \mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{r}}\rangle\, da &= \epsilon_0 c^2 \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\right]^2 \frac{1}{c}\langle \ddot{p}|^2_{t'=t-r/c}\rangle \int \frac{1}{r^2}\sin^2\theta\, da = \\
&= \epsilon_0 c^2 \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\right]^2 \frac{1}{c}\langle \ddot{p}|^2_{t'=t-r/c}\rangle \int \frac{1}{r^2}\sin^2\theta\, r^2 \sin\theta d\theta d\phi = \\
&= \epsilon_0 c^2 \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\right]^2 \frac{1}{c}\langle \ddot{p}|^2_{t'=t-r/c}\rangle \frac{8\pi}{3} = \\
&= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right]\frac{1}{c^3}\langle \ddot{p}|^2_{t'=t-r/c}\rangle\ . \qquad (17)
\end{aligned}$$