Diffusione da elettroni legati elasticamente

Nell'ipotesi di elettroni legati elasticamente nella materia, il moto del singolo elettrone è determinato dall'equazione del moto classica

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{\mathbf{F}_{\text{ext}}}{m_e} \tag{1}$$

dove la forza totale sull'elettrone tiene conto di contributi esterni, oltre alla forza di richiamo elastica e quella dissipativa

$$\mathbf{F}_{\text{totale}} = -m_e\omega_0^2\mathbf{r} - m_e\gamma\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{F}_{\text{ext}} = m_e\ddot{\mathbf{r}}$$

dove m_e è la massa a riposo dell'elettrone. Assumiamo che l'elettrone sia sollecitato da un'onda elettromagnetica piana (polarizzata linearmente lungo $\hat{z}$ e monocromatica di frequenza $\nu = \omega/2\pi$), caratterizzata da i campi [1]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(y,t) &= \hat{z}\,E_0 e^{i(ky-\omega t)} \\ \mathbf{B}(y,t) &= \hat{x}\,B_0 e^{i(ky-\omega t)} \\ B_0 c &= E_0 \end{aligned} \tag{2}$$

con c velocità della luce nel vuoto ed un ovvio significato dei simboli. Nella posizione ($y = 0$) dell'elettrone si ottiene che lo stesso obbedisce all'equazione

$$\ddot{z} + \gamma z + \omega_0^2 z = \frac{q_e}{m_e}\,E_0 e^{-i\omega t} \tag{3}$$

dove q_e è la carica dell'elettrone. La soluzione stazionaria

$$z(t) = z_0 e^{-i\omega t}\ ,$$

della (3) diviene

$$z(t) = \frac{q_e E_0/m_e}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}\,e^{-i\omega t}\ . \tag{4}$$

[1] Si sta supponendo che l'elettrone sia immerso nello spazio vuoto dove si propaga l'onda. Questo è inesatto dato che l'elettrone è immerso nella materia. Quindi ciò che si suppone è che la presenza della materia influenzi in modo molto debole l'elettrone, in pratica sia materia molto diluita in cui il campo elettrico **locale** (dovuto alla somma dei campi esterni e quelli dovuti alla presenza delle altre carche) coincida coi campi esterni.

In queste condizioni l'irraggiamento dell'elettrone che oscilla alla stessa frequenza dell'onda incidente, è caratterizzato da una potenza diffusa (su tutto l'angolo solido) data dalla formula di Larmor (si tratta di quantità mediate sul periodo di oscillazione per praticità)

$$\langle P_{\mathrm{diffusa}} \rangle = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{1}{c^3} \langle \ddot{p}^2 \rangle = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{q_e^2}{c^3} \langle \ddot{z}^2 \rangle \ . \tag{5}$$

Per il calcolo esplicito occorre ricordare di considerare solo la parte reale delle quantità oscillanti in gioco, in particolare derivando la (4)

$$\begin{aligned}
\langle [\Re\, \ddot{z}]^2 \rangle &= \langle \left[\Re \left(\frac{q_e E_0 / m_e}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \left(-\omega^2\right) e^{-i\omega t} \right) \right]^2 \rangle \\
&= \left(\frac{q_e E_0}{m_e} \right)^2 \frac{\omega^4}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]^2} \langle \left[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos\omega t + \gamma\omega \sin\omega t \right]^2 \rangle \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{q_e E_0}{m_e} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \ ,
\end{aligned} \tag{6}$$

dove si è usato il risultato

$$\begin{aligned}
& \langle \left[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos\omega t + \gamma\omega \sin\omega t \right]^2 \rangle = \\
= \ & \langle \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 \cos^2\omega t + 2\,(\omega_0^2 - \omega^2)\gamma\omega \sin\omega t\, \cos\omega t + \gamma^2\omega^2 \sin^2\omega t \right] \rangle = \\
= \ & (\omega_0^2 - \omega^2)^2 \langle \cos^2\omega t \rangle + 2\,(\omega_0^2 - \omega^2)\gamma\omega \langle \sin\omega t\, \cos\omega t \rangle + \gamma^2\omega^2 \langle \sin^2\omega t \rangle = \\
= \ & \frac{1}{2} \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2 \right] \ ,
\end{aligned} \tag{7}$$

dovuto alle relazioni $\langle \sin^2\omega t \rangle = \langle \cos^2\omega t \rangle = 1/2$ e $\langle \sin\omega t\, \cos\omega t \rangle = 0$. In conclusione dalle (5) e (6)

$$\langle P_{\mathrm{diffusa}} \rangle = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{q_e^2}{c^3} \frac{1}{2} \left(\frac{q_e E_0}{m_e} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \tag{8}$$

sezione d'urto di diffusione

Si può definire una sezione d'urto di diffusione dividendo la potenza diffusa (8) per l'intensità dell'onda incidente

$$I_{\mathrm{inc}} = \langle \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{k}} \rangle = \langle \left[\frac{(\Re\mathbf{E} \times \Re\mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{k}}}{\mu_0} \right] \rangle = \langle \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \cos^2\omega t \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\sigma_{\text{diffusione}}(\omega) &= \frac{\langle P_{\text{diffusa}} \rangle}{I_{\text{inc}}} = \frac{\frac{2}{3}\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right]\frac{q_e^2}{c^3}\,\frac{1}{2}\left(\frac{q_e E_0}{m_e}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}{\left[\frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\mu_0 c}\right]} = \\
&= \frac{8\pi}{3}\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{m_e c^2}\right]^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2} \\
&= \frac{8\pi}{3}\, r_0^2\, \frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}\ , \qquad (9)
\end{aligned}$$

dove si è usato $q_e = -e$, $\mu_0\epsilon_0 c^2 = 1$ e definito il raggio classico dell'elettrone $r_0 = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{m_e c^2}\right] = 2.8 \cdot 10^{-15}$ m $= 2.8$ fm.
Nel limite di grandi ω ($\omega \gg \omega_0 \gg \gamma$) si ottiene

$$\sigma_{\text{diffusione}}(\omega \gg \omega_0) \to \frac{8\pi}{3}\, r_0^2 \equiv \sigma_{\text{Thomson}} \approx 0.66 \cdot 10^{-28}\,\text{m}^2 = 0.66\,\text{barn}\ .$$

Si può facilmente dimostrare che la diffusione Thomson corrisponde alla diffusione da elettroni liberi, come fisicamente evidente dal fatto che la frequenza esterna è molto più grande della frequenza propria del sistema. Infatti se l'elettrone è libero l'equazione del moto (3) si riduce alla

$$\ddot{z} = \frac{q_e}{m_e}\, E_0 e^{-i\omega t} \qquad (10)$$

e la soluzione stazionaria $z(t) = z_0 e^{-i\omega t}$ diviene

$$z(t) = -\frac{q_e E_0/m_e}{\omega^2}\, e^{-i\omega t}\ . \qquad (11)$$

ovvero

$$\Re\ddot{z} = \frac{q_e E_0}{m_e}\,\cos\omega t$$

che sostituita nell'espressione della potenza diffusa (5) fornisce

$$\langle P_{\text{diffusa}} \rangle = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right]\frac{q_e^2}{c^3}\,\frac{1}{2}\left(\frac{q_e E_0}{m_e}\right)^2\ . \qquad (12)$$

Dividendo per l'intensità incidente ($I_{\text{inc}} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\mu_0 c} = \frac{1}{2}E_0^2\epsilon_0 c$) si ha una sezione d'urto

$$\sigma_{\text{diffusione}} = \frac{8\pi}{3}\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{m_e c^2}\right]^2 \qquad (13)$$

indipendente dalla frequenza incidente e costante, pari alla sezione d'urto Thomson.

coefficiente di assorbimento

L'intensità trasmessa $I_{\rm tra}$ dopo che la radiazione ha attraversato uno strato Δx di materia, risulterà dimuita rispetto all'intensità incidente $I_{\rm inc} = I(x = 0) = I$ di una quantità ΔI ($I(x + \Delta x) = I + \Delta I$) tale che (per conservazione dell'energia)

$$|\Delta I| \cdot area = \langle P_{\rm diffusa} \rangle \ ,$$

dove *area* risulta essere la superficie su cui la radiazione incide. In pratica la radiazione trasmessa è impoverita di tutta la radiazione che viene diffusa (sull'intero angolo solido) da tutti gli elettroni ($n_e = N_e \Delta V = N_e \Delta x \cdot area$) su cui incide ($N_e$ essendo il numero di elettroni per unità di volume, pari al numero di atomi per unità di volume ($N_{\rm atomi}$) moltiplicato il numero atomico (Z) $N_e = N_{\rm atomi} \cdot Z$) :

$$\begin{aligned} \Delta I \cdot area &= -\langle P_{\rm diffusa} \rangle \\ &= -I \cdot \sigma_{\rm Thomson} \cdot n_e \\ &= -I \cdot \sigma_{\rm Thomson} \cdot N_e \cdot \Delta x \cdot \cdot area \ , \end{aligned} \tag{14}$$

ovvero

$$I(x) = I(0) e^{-\mu x} = I(0) e^{-\sigma_{\rm Thomson} N_e x} \ . \tag{15}$$

Il coefficiente μ è detto coefficiente di assorbimento e la legge (15) è sperimentalmente verificata.

Si apre così la possibilità di misurare il numero atomico Z misurando $\mu = \sigma_{\rm Thomson} N_e$ e utilizzando l'espressione della sezione d'urto di Thomson, che resta valida anche in meccanica quantistica essendo non connessa ad alcuna quantità relativa al modello utilizzato.

$$Z = \frac{\mu}{\sigma_{\rm Thomson} N_{\rm atomi}} = \mu \, \frac{\mu_A}{\sigma_{\rm Thomson} N_A \varrho}$$

dove μ_A è la massa del grammoatomo, N_A il numero di Avogadro e ϱ la densità di massa del mezzo attraversato.

Un esempio è dato dalla corona circolare del sole, visibile (per la diffusione della luce solare) durante l' eclissi solare.

In questo caso la densità di elettroni è $N_e \approx 10^{15}$ elettroni/m^3, mentre l'estensione della corona è di $x \approx 7 \cdot 10^5$ Km $= 7 \cdot 10^8$ m, e la frazione di intensità trasmessa risulta

$$e^{-\sigma_{\mathrm{Thomson}} N_e x} \approx e^{-4.6 \cdot 10^{-5}} \approx 0.99995 \quad ! \, !$$

La radiazione diffusa è dunque una piccolissima percentuale di tutta la radiazione incidente proveniente dalla superficie del sole.