**Esercizi**

**sulla quantità di moto e momento angolare del campo elettromagnetico**

**1.**
Si consideri un condensatore a facce piane e parallele (superficie $A$ e distanza tra le armature $d$), la faccia inferiore (a $z = -d/2$) è caricata positivamente ed il campo elettrico risulta uniforme: $\mathbf{E} = \hat{z}\, E$ (si trascurino tutti gli effetti ai bordi). Il condensatore è immerso in un campo magnetico uniforme $\mathbf{B} = \hat{x}\, B$.
i) Trovare la quantità di moto del campo elettromagnetico nello spazio tra le piastre;
ii) se un filo di resistenza $R$ viene connesso tra le piastre, lungo l'asse $\hat{z}$ in modo da scaricare lentamente il condensatore, trovare la forza magnetica che agisce sul filo e la quantità di moto totale trasferita al sistema durante la scarica;
iii) invece di spegnere il campo elettrico come nel caso precedente, si spenga lentamente il campo magnetico. Si dimosri che l'impulso totale trasferito al sistema è di nuovo uguale alla quantità di moto inizialmente immagazzinata nei campi.

i) La densità di quantità di moto nei campi risulta

$$\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} = \epsilon_0 E\, B\, \hat{z} \times \hat{x} = \epsilon_0 E\, B\, \hat{y} \ ,$$

quella totale:

$$\int dV \mathbf{g} = \epsilon_0 E\, B\, A\, d\, \hat{y} \ .$$

ii) Durante la scarica del condensatore la forza sul filo risulta

$$\mathbf{F} = i(t) \int d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = i(t)\, d\, B\ \hat{y} \ ,$$

dove

$$i(t) = \frac{V}{R}\, e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{E\, d}{R}\, e^{-\frac{t}{RC}} \ ,$$

e $C = \epsilon_0 A/d$ è la capacità del condensatore.
L'impulso totale trasferito

$$\int dt\, \mathbf{F} = \hat{y}\ \frac{E\, d}{R}\, i(t)\, d\, B \int_0^\infty dt\, e^{-\frac{t}{RC}} = \hat{y}\ \frac{E\, d^2}{R}\, B\, RC = \hat{y}\ \epsilon_0 E\, B\, A\, d\, ;$$

come atteso per la conservazione della quantità di moto

iii) Se si spegne il campo magnetico, che passa da $B \to 0$, si ha $\frac{dB}{dt} < 0$ ed il campo elettrico $\mathbf{E}_i$ che si induce in virtù della variazioni del campo magnetico $\nabla \times \mathbf{E}_i = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, avrà verso concorde con l'orientazione della curva $d\mathbf{l}$,

$$\oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \Rightarrow -L\, d\, \frac{dB}{dt} = 2\, E_i\, L \Rightarrow |E_i| = \left| \frac{dB}{dt} \right| d\ .$$

$(A = L^2)$. La forza sulle armature cariche risulta

$$\mathbf{F} = \hat{y}\, \frac{1}{2} \left[ 2\sigma A \left| \frac{dB}{dt} \right| \right] d\ ,$$

e l'impulso totale trasferito

$$\int dt\, \mathbf{F} = \hat{y}\ \sigma A\, B\, d = \hat{y}\ \epsilon_0 E\, B\, A\, d\, ;\ ,$$

ancora una volta.

**2.**

Un condensatore sferico (raggio dell'armatura intera $a$ e di quella esterna $b$) accumula una carica $Q$. L'armatura interna è riempita di materiale uniformemente magnetizzato con magnetizzazione $\mathbf{M} = \hat{z} M$ e quindi manifesta un momento di dipolo magnetico $\mathbf{m} = (4/3 * \pi a^3)\, \mathbf{M}$

Nel condensatore è dunque presente un campo magnetico:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\, \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}}{r^3} = B_r \hat{\mathbf{r}} + B_\theta \hat{\theta} + B_\phi \hat{\phi}$$

con $B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{r^3} \cos\theta$, $B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3} \sin\theta$ e $B_\phi = 0$; ed un campo elettrico:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = E_r \hat{\mathbf{r}}\ ,$$

$(E_\theta = E_\phi = 0)$.

Il vettore di Poynting risulta

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4\pi}\, Q\, \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^5} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4\pi} \hat{\phi} \frac{Q|\mathbf{m}|}{r^5} \sin\theta$$

La densità di quantità di moto presente nel campo $\mathbf{g} = \mathbf{S}/c^2$ induce la presenza di una densità di momento angolare del campo $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{g}$. Risulta
$l_z = r|\mathbf{g}| \sin\theta$
$l_\perp = r|\mathbf{g}| \cos\theta$
ed il momento angolare totale del campo $\mathbf{L}^{\text{campo}} = \int dV\, \mathbf{l} = (L_z^{\text{campo}}, L_\perp^{\text{campo}})$ con $dV = r^2\, dr\, \sin\theta\, d\theta\, d\phi$ si ottiene

$$\begin{aligned} L_\perp^{\text{campo}} &= \int dV\, l_\perp = 0 \\ L_z^{\text{campo}} &= \int dV\, l_z = \frac{2}{3}\frac{1}{c^2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q|\mathbf{m}| \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \end{aligned}$$

Ora per studiare gli effetti meccanici sulle armature e vedere se a questo momento angolare del campo corrisponda un analogo momento angolare meccanico, occorre studiare gli effetti delle forze magnetiche sulle correnti durante il periodo di carica del condensatore, le uniche forze che possono indurre momento angolare perché perpendicolari al moto delle cariche (riflettere sul fatto che le forze elettriche agenti sul sistema non possono indurre momento angolare).

Se chiamimao $\pm q(t)$ la carica presente sulle armature ad un certo istante di tempo $t$, sotto ad un angolo $\theta$ la carica sull'armatura esterna risulterà

$$\begin{aligned} q(\theta, t) &= -q(t)\frac{\text{superficie sotto } \theta}{\text{superficie totale}} \\ &= -q(t)\, \frac{\int_0^{2\pi}\int_\theta^\pi b^2 d\Omega}{4\pi b^2} \\ &= \frac{2\pi b^2 \int_\theta^\pi \sin\theta d\theta}{4\pi b^2} \\ &= -q(t)\frac{1+\cos\theta}{2} \end{aligned}$$

La corrente che fluisce lungo l'armatura esterna sotto un angolo $\theta$ all'istante $t$ risulta $\hat{\theta}\, i_b(\theta, t) = \hat{\theta}\frac{dq(\theta,t)}{dt} = -\hat{\theta}\frac{1+\cos\theta}{2}\left|\frac{dq(t)}{dt}\right|$, dove $\left|\frac{dq(t)}{dt}\right| = i(t)$ è la corrente che fluisce nel circuito esterno. Sulla zona dell'armatura esterna di lunghezza $dl_b = b\, d\theta$ agisce quindi una forza $d\mathbf{F}_b$,
$d\mathbf{F}_b = i_b\, \hat{\theta} \times \mathbf{B}\, dl_b = i_b \hat{\theta} \times \hat{\mathbf{r}}\, B_r\, dl_b = \hat{\phi}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2|\mathbf{m}|}{b^3}\frac{1+\cos\theta}{2} \cos\theta\, i(t)\, b\, d\theta$ che produce un momento lungo $z$ (il momento trasverso totale si annulla per simmetria)
$d\tau_z = (\mathbf{r} \times d\mathbf{F}_b)_z = \hat{z} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\phi})\, b\, |d\mathbf{F}_b| = \hat{z} \cdot \hat{\theta}\, b\, |d\mathbf{F}_b| = b\, |d\mathbf{F}_b|\, \sin\theta$

Il momento della forza totale risulta:
$\tau_{b,z} = \int \frac{d\tau_z}{d\theta} d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2}{3} \frac{|\mathbf{m}|}{b} i(t)$ corrispondente ad una variazione di momento angolare totale sull'armatura esterna (inizialmente a momento angolare zero), pari a

$$L_{b,z}^{\text{meccanico}} = \int dt \frac{dL_{b,z}^{\text{meccanico}}}{dt} = \int dt\, \tau_{b,z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{2}{3} \frac{Q|\mathbf{m}|}{b}$$

dove si è usato $\int dt\, i(t) = Q$ e $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$.
L'analogo calcolo per la forza sull'armatura esterna risulta (il segno è dovuto al segno opposto della carica accumulata e quindi della corrente $i_a$),

$$L_{a,z}^{\text{meccanico}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{2}{3} \frac{Q|\mathbf{m}|}{a}$$

in totale quindi

$$L_z^{\text{meccanico}} = -\frac{2}{3} \frac{1}{c^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q|\mathbf{m}| \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

e perciò

$$\mathbf{L}^{\text{campo}} + \mathbf{L}^{\text{meccanico}} = 0 \ \ !!$$

**3.**
Supponiamo di avere una carica elettrica $q_e$ ed un (ipotetico) monopolo magnetico $q_m$, i cui campi corrispondano a:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e}{r^2} \hat{r} \ ,$$

come naturale, e

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_m}{r^2} \hat{r} \ ,$$

ipoteticamente.
Calcoliamo il momento angolare totale immagazzinato nei campi, assumendo che le due cariche sono separate da una distanza $d$.

Assumiamo dunque che $q_e$ sia collocata nell'origine delle coordinate, e che $q_m$ sia collocata in $\mathbf{d} = (0, 0, d)$. I campi che le due cariche producono in un punto campo $\mathbf{r} = (x, y, z) = (r \sin\vartheta \cos\phi, r \sin\vartheta \sin\phi, r \cos\vartheta)$ sono quindi

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e}{r^2} \hat{r} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_m}{r_m^2} \hat{r}_m \ ,$$

dove $\mathbf{r}_m = (\mathbf{r}-\mathbf{d}) = \hat{\mathbf{r}}_m \sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\vartheta}$.
La densità di quantotà di moto immagazzinata nei campi risulta

$$\begin{aligned}
\mathbf{g} &= \mu_o\epsilon_0\mathbf{S} = \epsilon_0\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{4\pi}\,\frac{q_e q_m}{r^3\,|\mathbf{r}-\mathbf{d}|^3}\,\mathbf{r}\times(\mathbf{r}-\mathbf{d}) = \,, \\
&= \hat{\phi}\,\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{4\pi}\,\frac{q_e q_m}{r^3}\,\frac{(r\sin\vartheta)\,d}{(r^2+d^2-2rd\cos\vartheta)^{3/2}}\;;
\end{aligned}$$

dato che $\mathbf{r}\times(\mathbf{r}-\mathbf{d}) = -\mathbf{r}\times\mathbf{d} = -(\hat{z}z+\hat{\rho}\rho)\times\hat{z}d = -\hat{\rho}\rho\times\hat{z}d = -(\hat{\rho}\times\hat{z})\,\rho d = \hat{\phi}\,\rho d = \hat{\phi}\,(r\sin\vartheta)\,d$, con $\rho=\sqrt{x^2+y^2}=r\sin\vartheta$.
Il momento angolare dei campi ha densità

$$\mathcal{L}^{\rm campo} = \mathbf{r}\times\mathbf{g} = (\mathbf{r}\times\hat{\phi})\,|\mathbf{g}|\;,$$

la cui componente residua sarà lungo l'asse $\hat{z}$ come facilmente si può verificare essendo $\mathbf{r}\times\hat{\phi} = (\hat{z}z+\hat{\rho}\rho)\times\hat{\phi} = -\hat{\rho}z+\hat{z}\rho = -\hat{\rho}r\cos\vartheta+\hat{z}r\sin\vartheta$. Infatti il momento angolare totale si ottiene integrando su tutto lo spazio ($dV = r^2dr\,\sin\vartheta d\vartheta\,d\phi \;\rightarrow\; 2\pi r^2 dr\,\sin\vartheta d\vartheta$) con l'attenzione di spezzare l'integrale nelle due zone $r>d$ e $r<d$ a causa dell differenza $|(\mathbf{r}-\mathbf{d})|$:

$$\begin{aligned}
L_z^{\rm campo} &= \int dV\,\mathcal{L}_z^{\rm campo} = \int dV\,\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{4\pi}\,\frac{q_e q_m}{r^3}\,\frac{(r\sin\vartheta)^2\,d}{(r^2+d^2-2rd\cos\vartheta)^{3/2}} = \\
&= 2\pi\,\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{4\pi}\,q_e q_m\int_0^d r^2dr\,\frac{1}{r^3}\frac{r^2\,d}{(2rd)^{3/2}}\,\int_0^\pi\frac{\sin\vartheta d\vartheta\,(1-\cos^2\vartheta)}{\left(\frac{r^2+d^2}{2rd}-\cos\vartheta\right)^{3/2}} + \\
&+ 2\pi\,\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{4\pi}\,q_e q_m\int_d^\infty r^2dr\,\frac{1}{r^3}\frac{r^2\,d}{(2rd)^{3/2}}\,\int_0^\pi\frac{\sin\vartheta d\vartheta\,(1-\cos^2\vartheta)}{\left(\frac{r^2+d^2}{2rd}-\cos\vartheta\right)^{3/2}} = \\
&= 2\pi\,\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{4\pi}\,q_e q_m\int_0^d r^2dr\,\frac{1}{r^3}\frac{r^2\,d}{(2rd)^{3/2}}\,\int_{-1}^{+1}dt\,\frac{(1-t^2)}{(\kappa-t)^{3/2}} + \\
&+ 2\pi\,\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{4\pi}\,q_e q_m\int_d^\infty r^2dr\,\frac{1}{r^3}\frac{r^2\,d}{(2rd)^{3/2}}\,\int_{-1}^{+1}dt\frac{(1-t^2)}{(\kappa-t)^{3/2}}\;,
\end{aligned}$$

dove $\kappa=\frac{r^2+d^2}{2rd}$ e $t=\cos\vartheta$.

L'integrale angolare è integrabile per parti e risulta

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} dt \frac{(1-t^2)}{(k-t)^{3/2}} &= -8\left\{\sqrt{\kappa-1}+\sqrt{\kappa+1}+\frac{2}{3}\left[(\kappa-1)^{3/2}-(\kappa+1)^{3/2}\right]\right\} = \\
&= \frac{16}{3}\frac{r^2}{d\sqrt{2rd}} \quad \text{per } r<d \\
&= \frac{16}{3}\frac{d^2}{r\sqrt{2rd}} \quad \text{per } r>d\,.
\end{aligned}
$$

In conclusione:

$$
\begin{aligned}
L_z^{\text{campo}} &= 2\pi\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{4\pi}\,q_e q_m\,d\left\{\int_0^d r^2 dr\,\frac{1}{r^3}\,\frac{r^2\,d}{(2rd)^{3/2}}\cdot\frac{16}{3}\frac{r^2}{d\sqrt{2rd}}\;+\right. \\
&\qquad\left.+\int_d^\infty r^2 dr\,\frac{1}{r^3}\,\frac{r^2\,d}{(2rd)^{3/2}}\cdot\frac{16}{3}\frac{d^2}{r\sqrt{2rd}}\right\} = \\
&= 2\pi\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{4\pi}\,q_e q_m\,d\,\frac{16}{3}\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{d}+\frac{1}{2}\frac{1}{d^3}d^2\right\} = \\
&= 2\pi\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{4\pi}\,q_e q_m\,d\,\frac{16}{3}\frac{1}{4}\,\frac{3}{2}\frac{1}{d} = \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}q_e\,q_m \quad !!!!\,. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Il momento angolare punta da $q_e$ a $q_m$ ed è sorprendente che il risultato non dipenda dalla distanza $d$. Siccome il momento angolare in meccanica quantistica è quantizzato, il risultato (1) suggerisce che, se i monopoli magnetici esistessero, si spiegherebbe perché le cariche elettriche e magnetiche sono quantizzate (un'idea proposta da Dirac nel 1931). Si noti che, a causa dell'indipendenza da $d$, anche se un solo monopolo magnetico esistesse nell'universo, le stesse ragioni che inducono alla quantizzazione del momento angolare suggerirebbero perché le cariche elettriche sono quantizzate.