Onde nei mezzi omogenei ed isotropi

Nei mezzi omogenei ed isotropi ed in assenza di cariche e correnti libere, le equazioni di Maxwell acquistano la forma:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 && (1)\\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && (2)\\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && (3)\\
\nabla \times \mathbf{B} &= \mu\sigma\mathbf{E} + \mu\epsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} && (4)
\end{aligned}$$

da cui (con tecniche simili all'elettrodinamica nel vuoto, cioè calcolando $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})$ e $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})$) si ottengono le equazioni delle onde nei mezzi omogenei ed isotropi, ovvero

$$\begin{aligned}
\nabla^2\mathbf{E} &- \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \ ; && (5)\\
\nabla^2\mathbf{B} &- \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \ ; && (6)
\end{aligned}$$

ancora disaccoppiate in $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$.

dielettrici non conduttori

Per mezzi *non conduttori* in cui $\sigma = 0$, le equazioni sono del tutto simili a quelle nel vuoto con la semplice ssotituzione $\mu_0 \to \mu$ e $\epsilon_0 \to \epsilon$. La sostituzione è di solo carattere matematico, dato che l'interpretazione dei campi è fisicamente molto diversa coinvolgendo la media dei campi microscopici, cioè risultando da una complicata combinazione del campo dovuto ai singoli atomi (si veda l'interpretazione microscopico dell'indice di rifrazione nel modello ad elettroni oscillanti).

Si evince dalle (5), (6) che la velocità di fase dell'onda monocromatica

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \ ;\\
&\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \ ; \qquad (7)
\end{aligned}$$

è modificata

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} = \frac{c}{n} \le c \ ,$$

n è chiamato indice di rifrazione e per la stragrande maggioranza dei dielettrici vale

$$n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \approx \sqrt{\epsilon_r} \quad \text{e} \quad \mu_r \approx 1 \ .$$

Si ha anche che l'ortogonalità tra il campo elettrico e magnetico è valida mentre la relazione tra i moduli è determinata da

$$\mathbf{k}^2 = \mu\epsilon\,\omega^2 = v^2\omega^2 = \frac{n^2}{c^2}\,\omega^2 \tag{8}$$

e contemporaneamente da

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega\,\mathbf{B} & \left[\text{da } \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathrm{t}}\right] \\ \mathbf{k} \times \mathbf{B} &= -\mu\epsilon\,\omega\mathbf{E} & \left[\text{da } \nabla \times \mathbf{B} = \mu\epsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathrm{t}}\right] \end{aligned}$$

e risulta

$$\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{B}|} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} = \frac{c}{n} = v \ . \tag{9}$$

La lunghezza d'onda nel mezzo è ridotta, quindi, di una quantità pari all'indice di rifrazione, essendo proporzionale alla velocità dell'onda nel mezzo (dalla (8)):

$$\frac{1}{|\mathbf{k}|} = \frac{v}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{\omega} v = \frac{1}{\nu}\frac{c}{n} \ .$$

mezzi conduttori

Nei mezzi in cui la conducibiltà $\sigma \neq 0$ possono stabilirsi onde piane monocromatiche del tipo (7) e le equazioni di Maxwell diventano

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega\,\mathbf{B} & \left[\text{da } \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathrm{t}}\right] \\ i\mathbf{k} \times \mathbf{B} &= \mu\sigma\mathbf{E} - i\mu\epsilon\,\omega\mathbf{E} & \left[\text{da } \nabla \times \mathbf{B} = \mu\epsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathrm{t}}\right] \ ; \end{aligned}$$

da cui

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{B}) = \mu\sigma\,\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E} - i\mu\epsilon\,\omega\,\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E} = 0 \ .$$

Il campo elettrico e magnetico sono ancora ortogonali tra loro ed ortogonali alla direzione di propagazione. Il vettor d'onda risulta complesso e vale la relazione

$$\mathbf{k}^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\omega\mu\sigma \ ;$$

da cui si possono dedurre la parte reale k_R e la parte immaginaria k_I di $\mathbf{k}$:

$$\begin{aligned} k_R &= \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}+1\right]^{1/2} \quad , \\ k_I &= \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}-1\right]^{1/2} \quad ; \end{aligned} \tag{10}$$

con il risultato che l'onda è attenuata nel propagarsi

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x,t) &= \hat{\mathbf{y}}\, E_0\, e^{-k_I x}\, e^{i(k_R x-\omega t)} \ ; \\ \mathbf{B}(x,t) &= \hat{\mathbf{z}}\, B_0\, e^{-k_I x}\, e^{i(k_R x-\omega t)} \ ; \end{aligned} \tag{11}$$

K_R ne determina la lunghezza d'onda (per quanto definibile) e k_I l'attenuazione. Per mezzi e frequenze per cui $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$, parte reale ed immaginaria (10) sono identiche, potremmo definir una distanza di penetrazione che è proprio l'inverso di k_I, la distanza in cui il campo elettrico è ridotto ad $1/e$;

$$d \equiv \lim_{\sigma\gg\omega\epsilon} \frac{1}{k_I} \approx \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}} \ .$$

Per avere un'idea dell'ordine di grandezza di d si consideri il caso di radiazione di 6000 Å$=$ 600 nm (arancione) (1 Å$=10^{-10}$ m; 1 nm $=10^{-9}$ m) incidente su di una superficie argentata ($\sigma \approx 6\times 10^7\,(\Omega\,\mathrm{m})^{-1}$), si ha

$$\omega = 2\pi\frac{c}{\lambda} \approx 3.1\times 10^{15}\,\mathrm{sec}^{-1} \qquad d \approx 2.9\times 10^{-9}\,\mathrm{m} \ .$$

Come esempio più generale si calcoli la velocità di fase, la lunghezza d'onda e la distanza di penetrazione per un'onda elettromagnetica radar di frequenza $\nu = 30$ GHz nell'acqua dell'oceano che (per tale frequenza) ha $\epsilon_r = 81$, $\mu \approx \mu_0$ e la conducibilità $\sigma = 4.3\,(\Omega\,\mathrm{m})^{-1}$ (la conducibilità è determinata dalla salinità media dell'oceano).

soluzione

Nelle condizioni citate $\sigma/(\omega\epsilon) \approx 0.03$ ed il mezzo si comporta come un cattivo conduttore. Le formule (10) possono essere sviluppate in potenze per $\sigma/(\omega\epsilon) \ll 1$ ottenendo

$$\begin{aligned} k_R &\approx \omega\sqrt{\mu\epsilon}\left[1+\frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right] \approx \omega\sqrt{\mu\epsilon} \ , \\ k_I &= \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \qquad \Rightarrow d = \frac{1}{k_I} \approx \frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \ . \end{aligned} \tag{12}$$

La velocità di fase, in questa approssimazione, equivale a quella in un mezzo dielettrico, ridotta, rispetto alla velocità di fase nel vuoto, quindi di un fattore, che in questo caso risulta

$$v = \frac{\omega}{k_R} \approx \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \approx \frac{c}{9} \ .$$

Anche la lunghezza d'onda si riduce dello stesso fattore, da $\lambda = c/\nu = 10$ cm, nel vuoto a

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_R} \approx \frac{2\pi}{\omega}\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_r}} = \frac{c}{\nu}\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \approx \frac{10\,\mathrm{cm}}{9} = 1.1\,\mathrm{cm} \ .$$

La distanza di penetrazione risulta (dalle (12))

$$d \approx 10^{-2}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{cm} \ .$$

Le ampiezze del campo elettrico e del campo magnetico (11) si riducono di un fattore $e^{-5} \approx 150$ per un tratto di 5 cm di profondità. A queste frequenze l'acqua dell'oceano è fortemente assorbente e rende inutile l'uso dei radar per visualizzare i mezzi sottomarini.