

## Indice di rifrazione nel modello ad elettroni oscillanti

Nell'ipotesi di elettroni legati elasticamente nella materia, il moto del singolo elettrone è determinato dall'equazione del moto classica

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{\mathbf{F}_{\text{ext}}}{m_e} \quad (1)$$

dove la forza totale sull'elettrone tiene conto di contributi esterni, oltre alla forza di richiamo elastica e quella dissipativa

$$\mathbf{F}_{\text{totale}} = -m_e \omega_0^2 \mathbf{r} - m_e \gamma \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{F}_{\text{ext}} = m_e \ddot{\mathbf{r}}$$

dove  $m_e$  è la massa a riposo dell'elettrone. Assumiamo che l'elettrone sia sollecitato da un'onda elettromagnetica piana (polarizzata linearmente lungo  $\hat{z}$  e monocromatica di frequenza  $\nu = \omega/2\pi$ ), caratterizzata da i campi

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(y, t) &= \hat{z} E_0 e^{i(ky - \omega t)} \\ \mathbf{B}(y, t) &= \hat{x} B_0 e^{i(ky - \omega t)} \\ B_0 &= E_0 \frac{n}{c} \end{aligned} \quad (2)$$

con  $n/c = 1/v$  velocità di fase della radiazione nel mezzo come già discusso. Nella posizione ( $y = 0$ ) dell'elettrone si ottiene che lo stesso obbedisce all'equazione

$$\ddot{z} + \gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{q_e}{m_e} E_0|_{\text{locale}} e^{-i\omega t} \quad (3)$$

dove  $q_e$  è la carica dell'elettrone. La soluzione stazionaria

$$z(t) = z_0 e^{-i\omega t} ,$$

della (3) diviene

$$z(t) = \frac{q_e}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E_0|_{\text{locale}} e^{-i\omega t} . \quad (4)$$

Il contributo di ogni singolo elettrone al vettore polarizzazione risulta in un momento di dipolo indotto dato da

$$\mathbf{p} = q_e \mathbf{r}(t) = q_e \hat{z} z(t)$$

ovvero

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} &= \frac{q_e^2}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \mathbf{E}_0|_{\text{locale}} e^{-i\omega t} = \\
&= \epsilon_0 \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \mathbf{E}|_{\text{locale}} = \\
&= \epsilon_0 \alpha \mathbf{E}|_{\text{locale}} \\
&\approx \epsilon_0 \alpha \mathbf{E} ,
\end{aligned} \tag{5}$$

dove la polarizzabilità atomica vale

$$\alpha = \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \tag{6}$$

ed è complessa.

L'ultima (approssimata) relazione di uguaglianza suppone che l'elettrone, immerso nella materia **localmente** sia sollecitato dal campo elettrico **medio** ivi presente. Si suppone cioè che la presenza della materia influenzi in modo molto debole l'elettrone, in pratica la materia è molto diluita di modo che campo elettrico **locale** (dovuto alla somma dei campi esterni e quelli dovuti alla presenza delle altre cariche nella materia) coincida coi campi esterni. Si può non ricorrere a questa ipotesi che ci farà restringere i risultati ai materiali poco densi, utilizzando le equazioni di Clausius-Mossotti per i campi locali. Torneremo a discuterne.

Dal momento indotto  $\mathbf{p}$  a livello microscopico si può risalire al momento di dipolo indotto per unità di volume  $\mathbf{P}$  attraverso il numero di elettroni per unità di volume  $N$ , ovvero

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= N\mathbf{p} = \epsilon_0 N\alpha\mathbf{E} = \\
&= \epsilon_0 \left[ \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right] \mathbf{E} = \\
&= \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} ,
\end{aligned} \tag{7}$$

che definisce la suscettività calcolata nel modello ad oscillatori

$$\begin{aligned}
\chi_e &= \left[ \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right] = \\
&= (\epsilon_r - 1) = n^2 - 1 = \\
&= (n + 1)(n - 1) \approx 2(n - 1) ,
\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è valida nel limite (implicito nell'ipotesi di materiali poco densi e quindi di campi locali approssimabili dal campo medio) di valori dell'indice di rifrazione  $n$  molto vicini all'unità. In conclusione l'indice di rifrazione risulta complesso con parte reale  $n_R = \Re n$  e parte immaginaria  $n_I = \Im n$ , ovvero

$$n = |n|e^{i\psi} = \sqrt{n_R^2 + n_I^2} e^{i\psi} . \quad (8)$$

con

$$\begin{aligned} n_R &= 1 + \frac{1}{2} \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \\ n_I &= \frac{1}{2} \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \end{aligned} \quad (9)$$

ovvero anche il vettore d'onda  $\mathbf{k}$  risulta complesso:

$$\begin{aligned} k_R &= \frac{\omega}{c} n_R ; \\ k_I &= \frac{\omega}{c} n_I ; \end{aligned} \quad (10)$$

provocando uno sfasamento nei campi (2) ed un'attenuazione:

$$\begin{aligned} B_0 &= E_0 \frac{n}{c} = E_0 \frac{|n|}{c} e^{i\psi} \\ \mathbf{E}(y, t) &= \hat{z} E_0 e^{-\frac{n_I}{c} \omega y} e^{i(\frac{n_R}{c} \omega y - \omega t)} \\ \mathbf{B}(y, t) &= \hat{x} E_0 \frac{|n|}{c} e^{-\frac{n_I}{c} \omega y} e^{i(\frac{n_R}{c} \omega y - \omega t + \psi)} . \end{aligned} \quad (11)$$

In particolare l'attenuazione (assorbimento) è legata alla parte immaginaria dell'indice di rifrazione che ha il suo massimo in  $\omega = \omega_0$ .  $n_I(\omega)$  è fortemente piccato intorno alla frequenza di risonanza. La parte reale  $n_R(\omega)$  dell'indice di rifrazione regola i fenomeni di dispersione *normale* (per  $\omega \ll \omega_0$ ) ed *anomala* (per  $\omega \approx \omega_0$ ). In particolare per  $\omega \ll \omega_0$  l'indice di rifrazione risulta praticamente reale ed *aumenta* con l'aumentare di  $\omega$  dando ragione del fenomeno della dispersione di mezzi trasparenti nella regione del visibile (esempio dispersione in aria, in acqua o in materiali vetrosi). Nella regione della dispersione anomala  $n_R(\omega)$  *diminuisce* all'aumentare di  $\omega$ .

I materiali possono essere caratterizzati da molte frequenze proprie intorno alle quali l'indice di rifrazione ripete l'andamento descritto. L'aria, l'acqua, il vetro sono caratterizzati da frequenze proprie situate nell'ultravioletto.

## Materiali densi

Nei materiali densi il campo elettrico locale non può essere approssimato dal campo elettrico medio come fatto nelle equazioni (5), occorre piuttosto poter approssimare la relazione tra campo medio e campo locale. Questa relazione è fornita dall'ipotesi di una geometria sferica per la cavità atomica, in questo caso vale

$$\mathbf{E}|_{\text{locale}} = \mathbf{E} + \frac{1}{3} \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$$

e le (5) e (7) divengono

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{q_e^2}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \mathbf{E}_0|_{\text{locale}} e^{-i\omega t} = \\ &= \epsilon_0 \alpha \mathbf{E}|_{\text{locale}} , \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= N\mathbf{p} = \epsilon_0 N\alpha \mathbf{E}|_{\text{locale}} = \\ &= \epsilon_0 N\alpha \left[ \mathbf{E} + \frac{1}{3} \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right] = \\ &= \epsilon_0 \frac{N\alpha}{1 - \frac{1}{3}N\alpha} \mathbf{E} \\ &= \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \\ &= \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E} \\ &= \epsilon_0 (n^2 - 1) \mathbf{E} . \end{aligned} \quad (13)$$

Perciò per i materiali densi, la relazione tra la polarizzabilità atomica (6) e l'indice di rifrazione diviene

$$(n^2 - 1) = \frac{N\alpha}{1 - \frac{1}{3}N\alpha} ,$$

ovvero

$$3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = N\alpha . \quad (14)$$