Esercizi

sui potenziali

1.
Trovare i campi e le distribuzioni di carica e corrente che corrispondono ai potenziali

$$V(\mathbf{r},t) = \varphi(\mathbf{r},t) = 0 \; ; \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qt}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \; ;$$

Discutere il risultato.

2.
Assumiamo

$$\varphi(\mathbf{r},t) = 0 \; ; \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \hat{y}\, A_0 \sin(kx - \omega t) \;\; :$$

con k ed ω costanti. Trovare $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ e verificare che soddisfano le equazioni di Maxwell nello spazio vuoto. Trovare le condizioni da imporre ad ω e k.

soluzioni
1.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = 0 \, . \end{aligned} \tag{1}$$

Che $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ può essere verificato sia per calcolo esplicito, che dalla considerazione che un campo centrale $f(r)\hat{\mathbf{r}}$ ha sempre rotore nullo.
Dunque il campo risultante è solo elettrico e dovuto ad una carica puntiforme posta all'origine delle coordinate. Il risultato può apparire strano, ma si può sempre azzerare il potenziale φ sottraendo una funzione identica, infatti le trasformazioni di Gauge

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla\chi \, , \\ \varphi' &= \varphi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \, , \end{aligned} \tag{2}$$

lasciano invariati i campi dati dalle (1) e se si sceglie χ in modo tale che

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \varphi \; , \; \text{ovvero} \qquad \chi = \varphi\, t \; ,$$

$\varphi' = 0$! Nel nostro caso

$$\chi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qt}{r} \; ;$$

porta al risultato

$$\begin{aligned} \varphi' &= 0 \; ; \\ \mathbf{A}' &= \nabla\chi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qt}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \; ; \end{aligned}$$

come proposto dal testo.

2.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\hat{y}\,A_0(-\omega)\cos(kx-\omega t) \\ \mathbf{B} &= \nabla\times\mathbf{A} = +\hat{z}\,kA_0\cos(kx-\omega t) \; . \end{aligned} \tag{3}$$

È facile verificare che $\nabla\cdot\mathbf{E} = \nabla\cdot\mathbf{B} = 0$, $\nabla\times\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$, e $\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\epsilon_0\partial\mathbf{E}/\partial t$ se

$$k^2 = \mu_0\epsilon_0\omega^2 \; ;$$

i potenziali corrispondono ad un'onda piana monocromatica. Infatti oltre alla forma funzionale propria dell'onda piana monocromatica ed alla relazione tra k ed *omega*, valgono anche le

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}} &\times \hat{\mathbf{B}} = \hat{y}\times\hat{z} = \hat{x} = \hat{\mathbf{k}} \; ; \\ \frac{E_0}{B_0} &= \frac{\omega A_0}{kA_0} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = c \; . \end{aligned}$$