**Esercizi**

**sui potenziali ritardati**

**1.**
Trovare i campi e le distribuzioni di carica e corrente che corrispondono ai potenziali

$$\varphi(\mathbf{r},t) = 0\,; \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \begin{cases} \hat{z}\,\frac{\mu_0\beta}{4c}(ct-|x|)^2\,, & \text{per} \quad |x| < ct\,, \\ \\ 0\,, & \text{per} \quad |x| > ct\,, \end{cases} \tag{1}$$

dove $\beta$ è una costante e $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$.
Dimostrare inoltre che:
i) i potenziali (1) obbediscono alla gauge di Lorentz;
ii) per una superficie chiusa a "scatola" rettangolare parallela al piano $yz$, di lunghezza $l$, larghezza $w$ ed altezza $h$, posta ad una distanza $d$ sopra il piano $yz$, l'aumento interno di energia elettromagnetica tra i due istanti $t_1 = d/c$ e $t_2 = (d+h)/c$ è pari al flusso entrante del vettore di Poynting integrato nel tempo nell'intervallo $t_1 < t < t_2$.

**2.**
Un filo (praticamente) infinito ed elettricamente neutro, è percorso da corrente

$$I(t) = \begin{cases} 0\,, & \text{per} \quad t \leq 0\,, \\ \\ I_0 & \text{per} \quad t \geq 0\,. \end{cases} \tag{2}$$

**soluzioni**
**1.**
Per $|x| < ct$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\hat{z}\,\frac{\mu_0\beta}{2}(ct-|x|)\,, \\ \mathbf{B} &= \nabla\times\mathbf{A} = -\hat{y}\,\frac{\mu_0\beta}{4c}\,\frac{\partial}{\partial x}(ct-|x|)^2 = \pm\,\hat{y}\,\frac{\mu_0\beta}{2c}(ct-|x|)\,; \end{aligned} \tag{3}$$

(con il segno *più* per $x > 0$ ed il segno *meno* per $x < 0$. Inoltre $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$ se $|x| > ct$.

È immediato dimostrare che

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \;, & \nabla \times \mathbf{E} = \mp\, \hat{y}\, \frac{\mu_0 \beta}{2} \;; \\ \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \;, & \nabla \times \mathbf{B} = -\, \hat{z}\, \frac{\mu_0 \beta}{2c} \;; \\ \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\, \hat{z}\, \frac{\mu_0 \beta c}{2} \;, & \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \pm\, \hat{y}\, \frac{\mu_0 \beta}{2} \;; \end{cases} \tag{4}$$

e le equazioni di Maxwell sono soddisfatte con $\varrho = 0$ e $\mathbf{j} = 0$. Il campo $\mathbf{B}$, mostra una discontinuità in $x = 0$ e questo segnala la presenza di una densità di corrente superficiale $\mathbf{J} = J\hat{z}$ nel piano $yz$ tale che valga la discontinuità

$$B_y(t)\big|_{x=0^+} - B_y(t)\big|_{x=0^-} = \mu_0 J$$

ovvero

$$J = \beta t \;.$$

**2.**
La densità di corrente nel filo dà origine ad un potenziale ritardato al suo intorno, ed essendo l'elemento di volume del filo di sezione costante $A$, $dV = dl \cdot A$, si ottiene

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}_2, t - r_{12}/c)\, dV_2 = \mathbf{j}(\mathbf{r}_2, t - r_{12}/c) \cdot A\, dl_2 = I(t - r_{12}/c)\, dl_2 = I(t - r_{12}/c)\, dz_2 \;,$$

avendo identificato l'asse $z$ con il filo. Il potenziale risulta

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_1, t) = \hat{z}\, \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I(t - r_{12}/c)}{r_{12}}\, dz_2 \;;$$

e per $r_{12}/c > t$ si ha $t - r_{12}/c < 0$ e la corrente è nulla in accordo con le (2). L'interpretazione è chiara: se $r_{12} > ct$, l'informazione circa la presenza della corrente non può essere giunta nel punto dove si calcola il campo $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, 0)$ a distanza

$$r_{12} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_2^2} = \sqrt{s_1^2 + z_2^2} \;,$$

dal punto sorgente $\mathbf{r}_2 = (0, 0, z_2)$. In pratica deve risultare

$$|z_2| \le \sqrt{(ct)^{-} s_1^2}$$

e l'integrale da calcolare risulta

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(s_1,t) &= \hat{z}\,\frac{\mu_0}{4\pi}\,I_0\int_{-\sqrt{(ct)^2-s_1^2}}^{+\sqrt{(ct)^2-s_1^2}}\frac{dz_2}{\sqrt{s_1^2+z_2^2}} = \hat{z}\,\frac{\mu_0}{4\pi}\,2\,I_0\int_0^{\sqrt{(ct)^2-s_1^2}}\frac{dz}{\sqrt{s_1^2+z^2}} = \\
&= \hat{z}\,\frac{\mu_0}{4\pi}\,2\,I_0\,\ln\left(\sqrt{s_1^2+z^2}+z\right)\Big|_0^{\sqrt{(ct)^2-s_1^2}} = \hat{z}\,\frac{\mu_0}{4\pi}\,2\,I_0\,\ln\left(\frac{ct+\sqrt{(ct)^2-s_1^2}}{s_1}\right)\ .
\end{aligned}$$

È immediato verificare che:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(s,t) &= -\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\hat{z}\,\frac{\mu_0}{4\pi}\,2\,I_0\,\frac{c}{\sqrt{(ct)^2-s^2}} \\
\mathbf{B}(s,t) &= \nabla\times\mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s}\hat{\phi} = \hat{\phi}\,\frac{\mu_0}{4\pi}\,2\,I_0\,\frac{ct}{s\,\sqrt{(ct)^2-s^2}}\ .
\end{aligned}$$

Il caso statico viene riprodotto nel limite $t\to\infty$, in cui $\mathbf{E}=0$ e $\mathbf{B}=\hat{\phi}\,\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{2\,I_0}{s}$.