Esercizi

sul tensore degli sforzi di Maxwell

1.
Si consideri un condensatore a facce piane e parallele (superficie A e distanza tra le armature d), la faccia inferiore (a $z = -d/2$) è caricata negativamente con densità superficiale $-\sigma$ ed il campo elettrico risulta uniforme: $\mathbf{E} = -\hat{z}\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ (si trascurino tutti gli effetti ai bordi). Determinare i nove elementi del tensore degli sforzi

$$\begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

e trovare la forza per unità di area che si esercita sull'armatura superiore.

Nel vuoto

$$T_{\alpha\beta} = \left(E_\alpha D_\beta - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\right) = \epsilon_0\left(E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\mathbf{E}^2\right)$$

pertanto

$$\begin{aligned} T_{xx} &= -\epsilon_0\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)^2 \quad T_{xy} = 0 \quad T_{xz} = 0 \\ Tyx &= 0 \quad T_{yy} = -\epsilon_0\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)^2 \quad T_{yz} = 0 \\ T_{zx} &= 0 \quad T_{zy} = 0 \quad T_{zz} = \epsilon_0\left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)^2 - \epsilon_0\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)^2 \end{aligned}$$

ovvero

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\epsilon_0} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\epsilon_0} & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\epsilon_0} \end{pmatrix}.$$

La forza per unità di superficie è legata al tensore dalla

$$F_\alpha = \int_S dF_\alpha = \sum_\beta \int_S T_{\alpha\beta} da_\beta \ ,$$

quindi, la forza infinitesima sull'armatura superiore sull'elemento di superficie $d\mathbf{a} = (da_x, da_y, da_z) = (0, 0, -da)$, risulta:

$$dF_x = T_{xx}da_x + T_{xy}da_y + T_{xz}da_z = 0$$

$$
\begin{aligned}
dF_y &= T_{yx}da_x + T_{yy}da_y + T_{yz}da_z = 0 \\
dF_z &= T_{zx}da_x + T_{zy}da_y + T_{zz}da_z = +\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\epsilon_0}\,da_z = -\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\epsilon_0}\,da\ .
\end{aligned}
$$

la forza totale agente nella direzione $\hat{z}$ vale

$$
-F_z = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\epsilon_0}\,A = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\epsilon_0}\,Q = \frac{1}{2}\,Q\,|E|\ ,
$$

dove Q è la carica (positiva) accumulata sull'armatura superiore ed $|E|$ il modulo del campo elettrico all'interno del condensatore.

2.
Determinare la forza totale sulla semisfera superiore di una sfera uniformemente carica di raggio R e carica totale Q.
Soluzione: La superficie contorno alla semisfera è costituita di due parti: la calotta semisferica superiore di raggio R ed il disco circolare di base a $\vartheta = \pi/2$ avendo cura di far coincidere l'origine del sistema di riferimento con il centro della sfera. Calcoleremo su questa superficie esterna il tensore degli sforzi, è quanto basta per trovare la forza totale esercitata su tutto il volume della semisfera. Sulla calotta si ha

$$
d\mathbf{a} = \hat{\mathbf{r}}\,|d\mathbf{a}| = \hat{\mathbf{r}}\,R^2\,d\Omega = \hat{\mathbf{r}}\,R^2 \sin\vartheta d\vartheta d\phi\ ,
$$

come elemento d'area, mentre il campo elettrico risulta

$$
\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{Q}{R^2}\,\hat{\mathbf{r}}\ ,
$$

dove, (in componenti cartesiane):

$$
\hat{\mathbf{r}} = \hat{x}\,\sin\vartheta\cos\phi + \hat{y}\,\sin\vartheta\sin\phi + \hat{z}\,\cos\vartheta\ .
$$

La forza sarà diretta lungo $\hat{z}$ per simmetria

$$
dF_z = T_{zx}da_x + T_{zy}da_y + T_{zz}da_z\ ,
$$

e le componenti rilevanti del tensore risultano:

$$
\begin{aligned}
T_{zx} &= \epsilon_0 E_z E_x = \epsilon_0\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^2}\right)^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\cos\phi\ , \\
T_{zy} &= \epsilon_0 E_z E_y = \epsilon_0\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^2}\right)^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\sin\phi\ , \\
T_{zz} &= \frac{\epsilon_0}{2}(E_z^2 - E_x^2 - E_y^2) = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^2}\right)^2 (\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\ ,
\end{aligned}
$$

ovvero

$$dF_z^{\text{calotta}} = \epsilon_0 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \right)^2 R^2 \, \frac{\cos\vartheta}{2} \, \sin\vartheta d\vartheta d\phi \; . \tag{1}$$

Integrando (attenzione ad integrare ϑ solo nel dominio $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$ che copre la semisfera...)

$$F_z^{\text{calotta}} = \int dF_z^{\text{calotta}} = \frac{1}{8} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R^2} \; . \tag{2}$$

Per il contributo del disco di base: il campo elettrico sul disco è quello *all'interno* della sfera carica:

$$\mathbf{E} = k_e \frac{Q}{R^3} \, r \, \hat{\mathbf{r}} = k_e \frac{Q}{R^3} \, r \, (\hat{x} \, \cos\phi + \hat{y} \, \sin\phi) \; ;$$

dato che sul disco $\vartheta = \pi/2$. L'elemento d'area sul disco si scrive $d\mathbf{a} = (0, 0, da_z) = -\hat{z} \, (rd\phi)dr$ e

$$dF_z^{\text{disco}} = T_{zz} da_z = \frac{\epsilon_0}{2} \left(E_z^2 - E_x^2 - E_y^2\right) da_z = +\frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} \right)^2 r^2 \, r dr d\phi \; .$$

Integrando

$$F_z^{\text{disco}} = \int dF_z^{\text{disco}} = \frac{1}{16} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \; .$$

La forza totale risulta

$$F_z = F_z^{\text{calotta}} + F_z^{\text{disco}} = \frac{3}{16} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \; .$$