esercizi di riepilogo dei contenuti di base necessari

1.) Dimostrare le seguenti identità vettoriali:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) &= \mathbf{B}\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\\
\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}-(\nabla\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{A}\\
\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) &= \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}\ .
\end{aligned}$$

.

suggerimento: è importante imparare ad usare il simbolo di Levi-Civita per le permutazioni (tensore totalmente antisimmetrico: $\epsilon_{123}=\epsilon_{312}=\epsilon_{231}=+1$, cioè pari a $+1$ per permutazioni pari della disposizione principale 123. Per permutazioni dispari $\epsilon_{132}=\epsilon_{321}=\epsilon_{213}=-1$. Inoltre $\epsilon_{ijk}=0$ se due o più indici sono ripetuti come $\epsilon_{112}=\epsilon_{122}=$ *etc.*. $=0$). Così la componente i-ma del prodotto vettoriale

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_i=\sum_{j,k}\epsilon_{ijk}A_jB_k=\epsilon_{ijk}A_jB_k\ ,$$

dove la somma su indici ripetuti è sottintesa.

(Esempio: $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_1=\sum_{j,k}\epsilon_{1jk}A_jB_k=\epsilon_{123}A_2B_3+\epsilon_{132}A_3B_2=A_2B_3-A_3B_2$, come deve. Evidentemente nella somma non si sono considerati tutti i termini con indici ripetuti (ϵ_{111}, ϵ_{112}, etc..., perché nulli.)

2.) Due goccie sferiche di acqua si scontrano e si fondono in una singola goccia sferica. Se le goccie avevano raggi R_1 ed R_2 e portavano cariche Q_1, Q_2, calcolare campo elettrico e potenziale elettrico sulla superficie della goccia composta.

3.) Una carica puntiforme q è inserita in una **cavità** all'interno di un conduttore **isolato** e scarico elettricamente.

a) determinare qualitativamente il campo elettrico nella cavità, nel conduttore e fuori del conduttore. Quale la carica totale sulla superficie della cavità e all'esterno della superficie del conduttore?

b) Come cambia la situazione se il conduttore è collegato a terra (potenziale elettrico costante e che quindi può essere assunto nullo)?

c) Discutere in dettaglio il caso di un conduttore formato da un guscio sferico di raggio interno R_{int} e raggio esterno R_{ext}; la carica q è posta la centro della cavità e quindi al centro del conduttore. Discutere anche l'andamento del potenziale e del campo elettrico nei due casi a) e b) precedenti (si supponga di voler porre il potenziale nullo a grandi distanze dal conduttore ($r\to\infty$).

4.) Una carica Q è uniformemente distribuita sulla superficie di una sfera di raggio R. Fuori la sfera è presente una densità di carica $\varrho(\mathbf{r}) = \varrho(r)$ tale che l'ampiezza del campo elettrico risulta costante. Determinare $\varrho(r)$.

5.) Due sfere cariche uniformemente (carica totale ciscuna $-Q/2$ e raggio $R/2$) sono collocate entro una sfera di raggio R anch'essa uniformemente carica e di carica totale Q. Determinare il l'andamento del campo elettrico per distanze molto grandi rispetto al raggio R.

Fisica Generale VI **Scheda n. 1**
esercizi di riepilogo dei contenuti di base necessari
– Testo e *Soluzioni*

1.) Dimostrare le seguenti identità vettoriali:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) &= \mathbf{B}\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \qquad (1)\\
\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}-(\nabla\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{A} \qquad (2)\\
\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) &= \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}\ . \qquad (3)
\end{aligned}$$

suggerimento: è importante imparare ad usare il simbolo di Levi-Civita per le permutazioni (tensore totalmente antisimmetrico: $\epsilon_{123}=\epsilon_{312}=\epsilon_{231}=+1$, cioè pari a $+1$ per permutazioni pari della disposizione principale 123. Per permutazioni dispari $\epsilon_{132}=\epsilon_{321}=\epsilon_{213}=-1$. Inoltre $\epsilon_{ijk}=0$ se due o più indici sono ripetuti come $\epsilon_{112}=\epsilon_{122}=$ *etc..* $=0$). Così la componente i-ma del prodotto vettoriale

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_i=\sum_{j,k}\epsilon_{ijk}A_jB_k=\epsilon_{ijk}A_jB_k\ ,$$

dove la somma su indici ripetuti è sottintesa.

(Esempio: $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_1=\sum_{j,k}\epsilon_{1jk}A_jB_k=\epsilon_{123}A_2B_3+\epsilon_{132}A_3B_2=A_2B_3-A_3B_2$, come deve. Evidentemente nella somma non si sono considerati tutti i termini con indici ripetuti (ϵ_{111}, ϵ_{112}, etc..., perché nulli.)

Soluzione

Utilizzando il tensore ϵ_{ijk} si ha:
per l'uguaglianza (1)

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}))_i &= \epsilon_{ijk}A_j(\mathbf{B}\times\mathbf{C})_k=\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}A_jB_lC_m=\\
&= \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}A_jB_lC_m=(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\,A_jB_lC_m=\\
&= B_iA_mC_m-C_iA_lB_l=B_i\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-C_i\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\ .
\end{aligned}$$

L'uguaglianza (2):

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= \nabla_i(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_i=\nabla_i\epsilon_{ijk}A_jB_k=\epsilon_{ijk}(\nabla_iA_j)B_k+\epsilon_{ijk}A_j(\nabla_iB_k)\\
&= \epsilon_{kij}B_k(\nabla_iA_j)-\epsilon_{jik}A_j(\nabla_iB_k)=B_k(\epsilon_{kij}\nabla_iA_j)-A_j(\epsilon_{jik}\nabla_iB_k)=\\
&= \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})-\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})=(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}-(\nabla\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{A}
\end{aligned}$$

La successiva uguaglianza (3):

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}\ .$$

è una particolare applicazione dell' identità (1). L'attenzione da porre è relativa alla **non commutatività** *dell'operatore ∇ e del campo vettoriale* **A**. *Si lascia al lettore di completare la dimostraione.*

2.) Due goccie sferiche di acqua si scontrano e si fondono in una singola goccia sferica. Se le goccie avevano raggi R_1 ed R_2 e portavano cariche Q_1, Q_2, calcolare campo elettrico e potenziale elettrico sulla superficie della goccia composta.

Soluzione

La goccia d'acqua risultante dalla fusione delle due deve avere un volume pari alla somma dei volumi precedenti (inmpressibilità dell'acqua), quindi:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 + \frac{4}{3}\pi R_2^3$$

ovvero

$$R = \left(R_1^3 + R_2^3\right)^{1/3} \quad .$$

Inoltre la conservazione della carica implica

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad .$$

Il campo elettrico sulla superficie è dato da (legge di Gauss):

$$\mathbf{E}(R) = \kappa_e \frac{Q}{R^2}\,\hat{\mathbf{r}} = \kappa_e \frac{Q_1 + Q_2}{(R_1^3 + R_2^3)^{2/3}}\,\hat{\mathbf{r}} \ ,$$

ed è radiale. ($\kappa_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ nel sistema di unità di misura MKSA, $\kappa_e = 1$ nel sistema CGS di Gauss).

Il potenziale elettrico può essere scritto:

$$\phi(R) = \kappa_e \frac{Q}{R} = \kappa_e \frac{Q_1 + Q_2}{(R_1^3 + R_2^3)^{1/3}} \quad .$$

3.) Una carica puntiforme q è inserita in una **cavità** all'interno di un conduttore **isolato** e scarico elettricamente.

a) determinare qualitativamente il campo elettrico nella cavità, nel conduttore e fuori del conduttore. Quale la carica totale sulla superficie della cavità e all'esterno della superficie del conduttore?

b) Come cambia la situazione se il conduttore è collegato a terra (potenziale elettrico costante e che quindi può essere assunto nullo)?

c) Discutere in dettaglio il caso di un conduttore formato da un guscio sferico di raggio interno R_{int} e raggio esterno R_{ext}; la carica q è posta la centro della cavità e quindi al centro del conduttore. Discutere anche l'andamento del potenziale e del campo elettrico nei due casi a) e b) precedenti (si supponga di voler porre il potenziale nullo a grandi distanze dal conduttore ($r \to \infty$).

Soluzione

a) *Il conduttore isolato inizialmente scarico resta scarico globalmente. L'introduzione della carica puntiforme nella cavità produrrà un campo elettrico radiale nelle immediate vicinanze della carica, come se dovuto alla sola carica puntiforme. Allontanandosi dalla carica le linee di forza devieranno dall'andamento radiale e dipenderanno dalla geometria della cavità. Le stesse linee di forza dovranno essere perpendicolari (infatti) alla superficie interna della cavità nelle sue immediate vicinanze. La carica totale indotta sulla superficie interna dovrà essere* **pari alla carica puntiforme indotta e di segno opposto**. *Infatti il campo elettrico all'interno del conduttore deve essere nullo ed una qualunque superficie di Gauss chiusa contenente la cavità e tutta immersa nel conduttore sarà attraversata da un flusso nullo di campo elettrico e quindi la sua carica interna netta dovrà essere nulla. La carica indotta sulla superficie interna della cavità sarà compensata da una carica uguale ed opposta distribuita sulla superficie esterna del conduttore dato che il conduttore dovrà essere a carica totale nulla visto che è isolato. Inoltre una superficie di Gauss chiusa esterna la conduttore e che lo contenga tutto al suo interno....*

b) *La situazione cambia se il conduttore è posto a terra. Il suo potenziale deve risultare costante e* **la sua carica totale non resta nulla** *potendo il collegamento trasportare cariche sul conduttore (o dal conduttore). In ogni caso il campo elettrico all'interno del conduttore deve risultare nullo. L'andamento del campo elettrico all'interno della cavità e dentro il conduttore risulta identico al* *caso precedente (essendo determinato dalle proprietà del conduttore), il potenziale resta costante per continuità dentro il conduttore (ed è nullo) e tale deve restare (sempre per continuità) all'esterno del conduttore. Allora la carica indotta sulla superficie esterna del conduttore deve essere nulla mentre quella interna (in totale pari a $-q$ per le ragioni esposte al punto a)) risulta essere trasferita per mezzo del collegamento a terra. In totale ora il conduttore ha assunto una carica $-q$ mentre era inizialmente scarico.*

c) *Gli argomenti qualitativi esposti nei punti a) e b) possono essere resi quantitativi in modo semplice nel caso di una geomtria sferica. Ripercorriamo dunque in modo quantitativo i punti a) e b) nel caso di un guscio conduttore sferico.*

c)-a) **guscio conduttore sferico isolato**
Campo elettrico e potenziale nelle diverse zone

$$
\begin{aligned}
r &< R_{int}\,;\ \phi(r) = \kappa_e \frac{q}{r} + \mathrm{A}\,; \qquad \mathbf{E}(r) = \kappa_e \frac{q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \\
R_{int} < r &< R_{ext}\,;\ \phi(r) = \kappa_e \frac{q}{R_{int}} + \mathrm{A}\,;\ \mathbf{E}(r) = 0 \\
r &> R_{ext}\,;\ \phi(r) = \kappa_e \frac{q}{r}\,; \qquad \mathbf{E}(r) = \kappa_e \frac{q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}\,.
\end{aligned}
$$

Il potenziale all'esterno ($r > R_{ext}$) ha la forma assegnata a causa delle condizioni al contorno poste per $r \to infty$, e quindi la costante A è determinata dalla condizione di continuità tra potenziale interno ed esterno a $r = R_{ext}$, ovvero

$$
\frac{q}{R_{int}} + \mathrm{A} = \frac{q}{R_{ext}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{A} = \frac{q}{R_{ext}} - \frac{q}{R_{int}}\,;
$$

In conclusione:

$$
\begin{aligned}
r &< R_{int}\,;\ \phi(r) = \kappa_e \left[\frac{q}{r} + \frac{q}{R_{ext}} - \frac{q}{R_{int}}\right]\,;\ \mathbf{E}(r) = \kappa_e \frac{q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \\
R_{int} < r &< R_{ext}\,;\ \phi(r) = \kappa_e \frac{q}{R_{ext}}\,; \qquad \mathbf{E}(r) = 0 \\
r &> R_{ext}\,;\ \phi(r) = \kappa_e \frac{q}{r}\,; \qquad \mathbf{E}(r) = \kappa_e \frac{q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}\,.
\end{aligned}
$$

c)-b) **guscio conduttore sferico posto a terra**

$$\begin{aligned} r &< R_{int}\,;\ \phi(r) = \kappa_e \frac{q}{r} + \mathrm{A}\,;\ \mathbf{E}(r) = \kappa_e \frac{q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \\ R_{int} < r &< R_{ext}\,;\ \phi(r) = 0\,; \qquad\qquad \mathbf{E}(r) = 0 \\ r &> R_{ext}\,;\ \phi(r) = 0\,; \qquad\qquad \mathbf{E}(r) = 0\,. \end{aligned}$$

Il potenziale all'interno del conduttore deve essere nullo a causa delle condizioni al contorno poste al conduttore, quindi per la costante A è determinata dalla condizione di continuità del potenziale a $r = R_{int}$, ovvero

$$\frac{q}{R_{int}} + \mathrm{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{A} = -\frac{q}{R_{int}}\,;$$

In conclusione:

$$\begin{aligned} r &< R_{int}\,;\ \phi(r) = \kappa_e \left[\frac{q}{r} - \frac{q}{R_{int}}\right]\,;\ \mathbf{E}(r) = \kappa_e \frac{q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \\ R_{int} < r &< R_{ext}\,;\ \phi(r) = 0\,; \qquad\qquad \mathbf{E}(r) = 0 \\ r &> R_{ext}\,;\ \phi(r) = 0\,; \qquad\qquad \mathbf{E}(r) = 0\,. \end{aligned}$$

4.) Una carica Q è uniformemente distribuita sulla superficie di una sfera di raggio R. Fuori la sfera è presente una densità di carica $\varrho(\mathbf{r}) = \varrho(r)$ tale che l'ampiezza del campo elettrico risulta costante. Determinare $\varrho(r)$.

Soluzione

Il campo elettrico è radiale per le condizioni sulla distribuzione di carica e risulta essere (in un generico punto $r > R$)

$$\mathbf{E}(r) = \kappa_e \frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} + \kappa_e \frac{q(r)}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\,,$$

dove il primo termine rappresenta il campo elettrico generato dalla carica Q uniformemente distribuita sulla superficie di raggio R, il secondo quello generato dalla distribuzione di carica $\varrho(r)$, ovvero

$$q(r) = \int_R^r dr'\, 4\pi r'^{\,2}\, \varrho(r')\,.$$

Le condizioni del problema impongono

$$\mathbf{E}(r) = \kappa_e \text{costante}\, \hat{\mathbf{r}} \ . \tag{4}$$

cioè

$$\kappa_e \frac{Q}{r^2} + \kappa_e \frac{1}{r^2} \int_R^r dr'\, 4\pi r'^{\,2}\, \varrho(r') = \kappa_e \text{costante} \ ,$$

oppure

$$\int_R^r dr'\, 4\pi r'^{\,2}\, \varrho(r') = \Big(\text{costante} \cdot r^2 - Q\Big) \ .$$

Derivando rispetto ad r si ottiene

$$4\pi r^2\, \varrho(r) = 2\,\text{costante} \cdot r \ ,$$

ovvero

$$\varrho(r) = \frac{2}{4\pi}\text{costante} \cdot r \ .$$

La costante non è arbitraria: deve valere, infatti dalla (4):

$$\kappa_e \text{costante} = \kappa_e \frac{Q}{R^2} \ ,$$

che fissa il valore costante dell'ampiezza del campo elettrico al valore che lo stesso campo assume immediatamente fuori della distribuzione sferica di carica di raggio R.

5.) Due sfere cariche uniformemente (carica totale ciscuna $-Q/2$ e raggio $R/2$) sono collocate entro una sfera di raggio R anch'essa uniformemente carica e di carica totale Q. Determinare il l'andamento del campo elettrico per distanze molto grandi rispetto al raggio R.

Soluzione

A grandi distanze ($r \gg R$) il sistema è equivalente a tre cariche puntiformi allineate: due di valore $-Q/2$ collocate a $x = \pm R/2$ ed una di valore Q collocata ad $x = 0$. In totale il sistema è equivalente a due dipoli elettrici allineati e di verso opposto che generano una distribuzine di quadrupolo lineare di cariche (la carica totale è nulla ed anche il momento di dipolo elettrico è nullo). Il potenziale avrà un andamento del tipo $1/r^3$ ed il campo elettrico del tipo $1/r^4$.