Lagrangiana del campo elettromagnetico

Il campo elettromagnetico nel vuoto è descritto dalle equazioni di Maxwell (in unità MKSA)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0} \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{4}$$

L'equazione di continuità

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \tag{5}$$

segue dalle (3) e (4) ed esprime la conservazione della carica elettrica. La forza di Lorentz che agisce su di una carica che si muove con velocità $\mathbf{v}$ è data dalla[1]

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \ . \tag{6}$$

Si possono introdurre i potenziali scalare (ϕ) e vettore ($\mathbf{A}$) ponendo

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{7}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \ . \tag{8}$$

Evidentemente le equazioni (1), (2) sono così automaticamente soddisfatte. Inoltre gli stessi campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ possono essere ottenuti da potenziali che differiscano dai precedenti per una trasformazione di "gauge" del tipo

$$\begin{cases} \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi \\ \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \ . \end{cases} \tag{9}$$

Utilizzando questa libertà si possono imporre condizioni specifiche ai potenziali, quali (ad esempio)

$$\phi = 0$$

[1] si suppone che la presenza della carica q *di prova* non alteri apprezzabilmente i campi esterni $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$

oppure

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

gauge di Coulomb, ovvero

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

gauge di Lorentz.

Allo scopo di derivare le equazioni di Maxwell da un principio di Hamilton, la Lagrangiana avrà la forma

$$L = L_{\text{particelle}} + L_{\text{interazione}} + L_{\text{campo}}$$

dove la Lagrangiana delle particelle libere avrà la forma

$$L^{\text{NR}}_{\text{particelle}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \tag{10}$$

nel caso non relativistico, e

$$L^{\text{Rel}}_{\text{particelle}} = \sum_i -m_i c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{r}}_i^2}{c^2}} \tag{11}$$

nel caso relativistico.

In un primo tempo ci accontenteremo di voler descrivere la corretta equazione del moto (dovuta alla forza di Lorentz) delle particelle cariche in un campo elettromagnetico assegnato ed esterno[2]. La Lagrangiana di interazione

$$L_{\text{interazione}} = \sum_i \left(q_i\, \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i - q_i\, \phi(\mathbf{r}_i)\right) \tag{12}$$

è in grado di riprodurla.
Infatti l'equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

[2]Si suppone quindi che la presenza delle cariche non alteri apprezzabilmente il campo elettromagnetico esterno. Per la discussione di tali ipotesi rimandiamo alla letteratura, noi ci limiteremo a supporle soddisfatte.

corrispondente alla coordinata x dell'i-ma particella (l'indice è omesso per brevità di notazione) applicata alla Lagrangiana $L = L^{\mathrm{NR}}_{\mathrm{particelle}} + L_{\mathrm{interazione}}$, diviene

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{x} + qA_x(\mathbf{r})\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(q\mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot\dot{\mathbf{r}} - q\phi(\mathbf{r})\right) \tag{13}$$

e ricordando che $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla f$, si ottiene:

$$m\ddot{x} = q\left[-\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x}\right] + q\left[\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right] \quad , \tag{14}$$

che è proprio la prima componente dell'equazione $m\ddot{\mathbf{r}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$, che segue dalla (6). Un'equazione analoga può essere ricavata assumendo per le particelle libere una Lagrangiana relativistica del tipo (11), in questo caso la variazione della quantità di moto assume la forma relativistica

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma m\dot{x}\right) = \frac{dp_x}{dt} \tag{15}$$

che risulta legata alla forza di Lorentz tramite:

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma m\dot{\mathbf{r}}\right) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})\ . \tag{16}$$

Se invece di cariche puntiformi si considera una distribuzione continua di cariche e di correnti, la Lagrangiana di interazione (12) prende la forma di un integrale

$$L_{\mathrm{interazione}} = \int \left[\mathbf{j}\cdot\mathbf{A} - \varrho\phi\right]\, d^3\mathbf{r}\ . \tag{17}$$

Notiamo che la funzione integranda è uno scalare di Lorentz, infatti $\mathbf{j}\cdot\mathbf{A} - \varrho\phi = -j_\mu A^\mu$). Non ci resta che "indovinare" la Lagrangiana del campo libero (L_{campo}). Ricordando che l'energia del campo è data da

$$\frac{1}{2}\int\left[\epsilon_0\mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2\right]\, d^3\mathbf{r} = \frac{1}{2\,\mu_0}\int\left[\frac{\mathbf{E}^2}{c^2} + \mathbf{B}^2\right]\, d^3\mathbf{r} \tag{18}$$

e che una diversa combinazione delle stesse quantità (ovvero $\mathbf{E}^2/c^2 - \mathbf{B}^2$) si riduce ad uno scalare di Lorentz, proporzionale a $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2/c^2)$, potremmo assumere

$$L_{\mathrm{campo}} = \frac{1}{2}\int\left[\epsilon_0\mathbf{E}^2 - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2\right]\, d^3\mathbf{r}\ . \tag{19}$$

La giustificazione di questa scelta risiede nel fatto che da essa derivano le equazioni di Maxwell (3) e (4) (le altre due sono automaticamente soddisfatte come conseguenza delle (7),(8). Consideriamo il principio di Hamilton

$$\begin{aligned}\delta S = & \ \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \ [L_{\text{campo}} + L_{\text{interazione}}] = \\ = & \ \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} - \varrho \phi \right) d^3\mathbf{r} = 0 \ . \qquad (20)\end{aligned}$$

Le viariazione di $\mathbf{A}$ e ϕ devono soddisfare le condizioni

$$\delta \mathbf{A}(t_1) = \delta \mathbf{A}(t_2) = \delta \phi(t_1) = \delta \phi(t_2) = 0 \qquad (21)$$

ed i campi $\delta \mathbf{A}$ e $\delta \phi$ dovranno annullarsi abbastanza rapidamente all'infinito. Dalle (7),(8) ed usando le identità:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (f \mathbf{V}) &= f \, \nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla f \\ \nabla \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{U}) &= -\mathbf{V} \cdot \nabla \times \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \nabla \times \mathbf{V}\end{aligned}$$

si ha (poiché $\epsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_o}$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\mu_o \, c^2} \, \delta \mathbf{E}^2 &= \frac{1}{\mu_0 \, c^2} \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{E} = -\frac{1}{\mu_0 \, c^2} \, \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \delta \mathbf{A} - \frac{1}{\mu_o \, c^2} \, \mathbf{E} \cdot \nabla \delta \phi = \\ &= -\frac{1}{\mu_0 \, c^2} \, \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{A}) + \frac{1}{\mu_0 \, c^2} \, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \delta \mathbf{A} + \\ & \quad -\frac{1}{\mu_0 \, c^2} \, \nabla \cdot (\mathbf{E} \, \delta \phi) + \frac{1}{\mu_0 \, c^2} \, \nabla \cdot \mathbf{E} \, \delta \phi \ ; \qquad (22)\end{aligned}$$

inoltre:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2\mu_o} \, \delta \mathbf{B}^2 &= -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{B} = -\frac{1}{\mu_0} \, \mathbf{B} \cdot \nabla \times \delta \mathbf{A} = \\ &= +\frac{1}{\mu_o} \, \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \delta \mathbf{A}) - \frac{1}{\mu_0} \, \delta \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} \ ; \qquad (23)\end{aligned}$$

Sostituendo queste variazioni nella (20) si ottiene:

$$
\begin{aligned}
\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int \quad d^3\mathbf{r} \quad & \frac{1}{\mu_o}\left\{\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla\times\mathbf{B} + \mu_0\,\mathbf{j}\right]\cdot\delta\mathbf{A} + \right.\\
+ \quad & \frac{1}{c^2}\left[\nabla\cdot\mathbf{E} - \frac{1}{\epsilon_0}\,\varrho\right]\delta\phi + \\
- \quad & \frac{1}{c^2}\left[\nabla\cdot(\mathbf{E}\,\delta\phi) - c^2\,\nabla\cdot(\mathbf{B}\times\delta\mathbf{A}) + \right.\\
+ \quad & \left.\left.\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{A})\right]\right\} = 0
\end{aligned} \tag{24}
$$

Il termine $-\int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\mathbf{r}\frac{1}{\mu_o}\,\frac{1}{c^2}\nabla\cdot[\mathbf{E}\,\delta\phi - c^2\,\mathbf{B}\times\delta\mathbf{A}]$ si può trasformare in un integrale di superficie che si annulla quando la superficie tende all'infinito, mentre il termine $-\int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\mathbf{r}\frac{1}{\mu_o}\,\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{A})$ si annulla in virtù delle condizioni (21). In conclusione la condizione di stazionarietà dell'azione e quindi l'arbitrarietà di $\delta\phi$ e $\delta\mathbf{A}$ implica

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla\times\mathbf{B} + \mu_0\,\mathbf{j} &= 0\\
\nabla\cdot\mathbf{E} - \frac{1}{\epsilon_0}\,\varrho &= 0
\end{aligned} \tag{25}
$$

che corrispondono alle equazioni di Maxwell (3), (4), non omogenee nei campi (le altre due seguono dalle definizioni (7), (8)).

Si è dunque ottenuta la Lagrangiana completa per descrivere le particelle cariche ed i campi. Ci si può domandare come la Lagrangiana vari a causa di una trasformazione di gauge (9). Solo la Lagrangiana di interazione verrà modificata per l'aggiunta di un termine del tipo

$$
\begin{aligned}
\int d^3\mathbf{r}\left[\mathbf{j}\cdot\nabla\chi + \varrho\,\frac{\partial\chi}{\partial t}\right] &= \int d^3\mathbf{r}\,\nabla\cdot(\mathbf{j}\,\chi) + \\
&+ \frac{d}{dt}\int d^3\mathbf{r}\,\varrho\,\chi + \\
&- \int d^3\mathbf{r}\left[\nabla\cdot\mathbf{j} + \frac{\partial\varrho}{\partial t}\right] .
\end{aligned} \tag{26}
$$

Il primo termine del secondo membro può essere trasformato in un integrale di superficie che si annulla quando la superficie tende all'infinito, il secondo termine si annulla perché è una derivata totale rispetto al tempo ed è inessenziale quando inserito nel principio di minima azione, l'ultimo termine si annulla per il principio di conservazione (5). Dunque l'invarianza della teoria per trasformazioni di gauge è strettamente connessa alla conservazione della carica elettrica.

Vorremmo ora rifare il persorso fatto utilizzando il formalismo quadridimensionale per renderci conto che il linguaggio naturale è proprio quello tensoriale nello spaziotempo.

Iniziamo col considerare la Lagrangiana di una particella carica in un campo elettromagnetico esterno (cfr. eqs. (11),(12)) e quindi l'azione

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} - e\,(\phi - \mathbf{A}\cdot\mathbf{v}) \right] \\
&= \int \left[-m_0 c\, ds - e A_\mu\, dx^\mu \right] \qquad (27)
\end{aligned}
$$

dove si è fatto uso delle relazioni $ds = c\,dt\,\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}$ ed $A_\mu\, dx^\mu = (\frac{\phi}{c}\, c\, dt - \mathbf{A}\cdot\mathbf{r})$. La (27) è manifestamente invariante per trasformazioni di Lorentz.
Applicando ora il principio variazionale alla precedente azione vogliamo ricavare le equazioni del moto in forma covariante. Supporremo (vedi note 1,2) che i campi siano dati e che possiamo variare solo le traiettorie con la condizione di stazionarietà ai tempi t_1, t_2. Si ha

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int \delta \left[-m_0 c\, ds - e A_\mu\, dx^\mu \right] = \\
&= \int \left[-m_0 c\, 2\, \frac{dx_\mu\, d\delta x^\mu}{2\, ds} - \delta A_\mu\, dx^\mu - e A_\mu\, d\delta x^\mu \right] = \\
&= \int \left[-m_0\, u_\mu\, d\delta x^\mu - e\,(\partial_\nu A_\mu)\,\delta x^\nu\, dx^\mu - e\, A_\mu\, d\delta x^\mu \right] = \\
&= \int \left[-m_0\, u_\mu\, d\delta x^\mu - e\,(\partial_\nu A_\mu)\,\delta x^\nu\, dx^\mu - e\, A_\mu\, d\delta x^\mu \right] \ . \qquad (28)
\end{aligned}
$$

Si sono usate le relazioni $ds = \sqrt{dx_\mu\, dx^\mu}$, $\delta A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\,\delta x^\nu = (\partial_\nu A_\mu)\,\delta x^\nu$, $u_\mu = c\,\frac{dx_\mu}{ds}$. Il primo termine può essere integrato per parti:

$$
\int \left[-m_0\, u_\mu\, d\delta x^\mu \right] = \left[-m_0\, u_\mu \delta x^\mu \right]\Big|_{t_1}^{t_2} + \int du_\mu\, m_0\, \delta x^\mu = zero + \int du_\mu\, m_0\, \delta x^\mu \ ,
$$

a causa delle condizioni $\delta x^\mu(t_1) = \delta x^\mu(t_2) = 0$. Anche il termine di interazione contiene contributi che possono essere integrati per parti per arrivare anche qui ad una forma del tipo $\int [...]\, \delta x^\mu$. Infatti si ha:

$$\begin{aligned} & -e \int [(\partial_\nu A_\mu)\, \delta x^\nu\, dx^\mu + A_\mu\, d\delta x^\mu] = \\ = & -e \left\{ \int [(\partial_\nu A_\mu)\, \delta x^\nu\, dx^\mu - dA_\mu\, \delta x^\mu] + [A_\mu\, \delta x^\mu]\,\Big|_{t_1}^{t_2} \right\} . \end{aligned} \tag{29}$$

Anche in questo caso il termine integrato è nullo mentre l'espressione restante può essere riscritta utilizzando la definizione $dA_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\, dx^\nu = (\partial_\nu A_\mu)\, dx^\nu$ e scambiando gli indici muti $\nu \Longleftrightarrow \mu$

$$\begin{aligned} & -e \int [(\partial_\nu A_\mu)\, \delta x^\nu\, dx^\mu - (\partial_\nu A_\mu)\, dx^\nu\, \delta x^\mu] = \\ = & -e \int [\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu]\;\, dx^\nu\, \delta x^\mu = \\ = & -e \int F_{\mu\nu}\, dx^\nu\, \delta x^\mu\ . \end{aligned} \tag{30}$$

In conclusione, mettendo insieme i vari contributi alla variazione dell'azione si ottiene

$$\begin{aligned} \delta S & = \int [du_\mu\, m_0\, \delta x^\mu - e\, F_{\mu\nu}\, dx^\nu\, \delta x^\mu] = \\ & = \int \left[m_0 \frac{du_\mu}{ds} - e\, F_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \right] \delta x^\mu\, ds = 0\ . \end{aligned} \tag{31}$$

La precedente equazione(31) sarà soddisfatta per un'arbitaria variazione delle coordinate δx^μ se

$$m_0 \frac{du_\mu}{ds} = e\, F_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{ds}$$

che generalizza l'espressione della forza di Lorentz ottenuta nella (16). Infatti la parte spaziale dell'equazione ($\mu = 1, 2, 3$) è facilmente verificata essere proprio

$$\gamma \frac{d}{dt} (\gamma m_0 \dot{\mathbf{r}}) = \gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \gamma q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})\ , \tag{32}$$

ovvero la citata equazione di Lorentz (16). La parte temporale ($\mu = 0$) contiene informazioni sulla conservazione dell'energia ed è riducibile alla forma

$$\frac{d}{dt} \left(\gamma m_0\, c^2 \right) = e\, \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}\ . \tag{33}$$

Ovvero la variazione di energia totale (che coincide con la variazione dell'energia cinetica) della particella è uguale al lavoro per unità di tempo che il campo elettrico esterno compie sulla particella carica (il campo magnetico non compie infatti lavoro).

Ultimo passo è ora ricavare le equazioni di Maxwell in forma covariante dal principio variazionale per la Lagrangiana del campo elettromagnetico (20)

$$\begin{aligned}\delta S = & \;\delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, [L_{\text{campo}} + L_{\text{interazione}}] = \\ = & \;\delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2 + \mathbf{j}\cdot\mathbf{A} - \varrho\phi\right) d^3\mathbf{r} = \\ = & \;\delta \left\{ -\frac{1}{c} \int \left[j_\mu A^\mu + \frac{1}{4\mu_o} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] d\Omega \right\} = 0 \qquad (34)\end{aligned}$$

dove si è fatto uso delle osservazioni già formulate discutendo le equazioni (17) e (18) e si è scritto l'elemento di volume in quattro dimensione $d\Omega = c\,dt\,d^3\mathbf{r} = dx^0\,dx^1\,dx^2\,dx^3$

Le variazioni si ottengono dalle

$$\begin{aligned}\delta\,(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) &= 2\,F_{\mu\nu}\,\delta F^{\mu\nu} = 2\,F_{\mu\nu}\,[\partial^\mu(\delta A^\nu) - \partial^\nu(\delta A^\mu)] = \\ &= 2\,[F_{\mu\nu}\,\partial^\mu(\delta A^\nu) - F_{\mu\nu}\,\partial^\nu(\delta A^\mu)] = \\ &= -4\,F_{\mu\nu}\,\partial^\nu(\delta A^\mu)\;, \qquad (35)\end{aligned}$$

dove si è usata la proprietà di antisimmetria del tensore elettromagnetico scambiando gli indici muti $\nu \Longleftrightarrow \mu$, ovvero $F_{\mu\nu}\,\partial^\mu(\delta A^\nu) = F_{\nu\mu}\,\partial^\nu(\delta A^\mu) = -F_{\mu\nu}\,\partial^\nu(\delta A^\mu)$. La variazione della parte di interazione è legata alla semplice variazione del potenziale essendo le sorgenti fissate, quindi la variazione totale (34) si riduce a

$$\begin{aligned}\delta S &= -\frac{1}{c}\,\delta \int d\Omega \left[j_\mu A^\mu + \frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] = \\ &= -\frac{1}{c} \int d\Omega \left[j_\mu\,\delta A^\mu - \frac{1}{4\mu_0}\,4\,F_{\mu\nu}\,\partial^\nu(\delta A^\mu) \right] = \\ &= -\frac{1}{c} \int d\Omega \left[j_\mu \delta A^\mu - \frac{1}{\mu_0}\,[\,\partial^\nu(F_{\mu\nu}\,\delta A^\mu) - \partial^\nu(F_{\mu\nu})\,\delta A^\mu\,] \right] \qquad (36)\end{aligned}$$

dove si è fatto uso dell'integrazione per parti ottenuta da $\partial^\nu(F_{\mu\nu}\,\delta A^\mu) = \partial^\nu(F_{\mu\nu})\,\delta A^\mu + F_{\mu\nu}\,\partial^\nu(\delta A^\mu)$. Ora il teorema di Gauss può essere applicato all'integrale di volume della quadridivergenza $\partial^\nu (F_{\mu\nu}\,\delta A^\mu)$ riducendosi ad un integrale di superficie attraverso l'uguaglianza

$$\int d\Omega\,\partial^\nu (F_{\mu\nu}\,\delta A^\mu) = \int dS^\nu (F_{\mu\nu}\,\delta A^\mu) = 0\ . \tag{37}$$

L'annullarsi dell'integrale di superficie è dovuto al fatto che le variazioni del potenziale si annullano agli estremi nella variabile tempo, mentre alla superficie tri-dimensionale all'infinito si annullano a causa del loro andamento asintotico sulle coordinate spaziali. In conclusione la variazione si riduce

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int d\Omega \left[j_\mu + \frac{1}{\mu_0}\,\partial^\nu (F_{\mu\nu}) \right] \delta A^\mu = 0\ . \tag{38}$$

Le variazioni δA^μ sono arbitrarie in osservanza del principio di minima azione e quindi i coefficienti di δA^μ devono essere nulli, ovvero:

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = -\mu_0\, j_\mu\ , \tag{39}$$

che rappresentano la forma covariante delle equazioni di Maxwell non omogenee come si può facilmenete dimostrare.

Infine possiamo facilmente dimostrare (in forma covariante) che l'azione del campo elettromagnetico

$$S = -\frac{1}{c}\int d\Omega \left[j_\mu\, A^\mu + \frac{1}{4\mu_o}\, F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu} \right] \tag{40}$$

è invariante per tasformazioni di gauge (9), che in forma quadrimensionale si possono scrivere

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi\ . \tag{41}$$

La trasformazione (41) lascia il tensore $F_{\mu\nu}$ invariato (come accade per i campi che ne sono le componenti), infatti

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = F_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu \chi + \partial_\nu \partial_\mu \chi = F_{\mu\nu}\ .$$

Le trasformazioni (41) producono nel termine di interazione la trasformazione da S ad S',

$$S'_{\rm int} \;=\; -\frac{1}{c}\int d\Omega\ j_\mu\, A'^\mu = -\frac{1}{c}\left\{ \int d\Omega\ j_\mu\, A^\mu - \int d\Omega\ j_\mu\, \partial^\mu \chi \right\} =$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{c}\left\{\int d\Omega\ j_\mu\, A^\mu - \int d\Omega\ \left[\partial^\mu\left(j_\mu\,\chi\right) - \left(\partial^\mu j_\mu\right)\chi\right]\right\} = \\
&= -\frac{1}{c}\left\{\int d\Omega\ j_\mu\, A^\mu - \int dS^\mu\ \left(j_\mu\,\chi\right) - \int d\Omega\ \left(\partial^\mu j_\mu\right)\chi\right\} = \\
&= -\frac{1}{c}\int d\Omega\ j_\mu\, A^\mu = S_{\mathrm{int}}\ , \qquad (42)
\end{aligned}
$$

dove l'ultima uguaglianza (che dimostra l'invarianza dell'azione per trasformazioni di gauge), segue dall'annullarsi dell'integrale di superficie $\int dS^\mu\ (j_\mu\,\chi) = 0$ ottenuto dall'applicazione del teorema della divergenza e per l'annullarsi dei campi sulla superficie, e dalla conservazione della carica $\partial^\mu j_\mu = 0$. Ne segue che l'azione è invariante per trasformazioni di gauge grazie alla conservazione della carica (e viceversa).