Disuguaglianza per le trasformate di Fourier

un esempio

Consideriamo un'onda monocromatica piana (unidimensionale) di pulsazione ω_0 e numero d'onda $k_0 = 2\pi/\lambda_0 = \omega_0/c$, quindi di velocità di fase c

$$u(x,t) = f_0 \cos(k_0 x - \omega_0 t) \ .$$

Supponiamo che un treno d'onda di lunghezza $L \gg \lambda_0$ sia costituito da un segmento di questa onda monocromatica, in modo tale che a $t = 0$

$$\begin{cases} u(x,t=0) = f_0 \cos k_0 x = \frac{1}{2} f_0 \left[e^{ik_0 x} + e^{-ik_0 x} \right] & \text{per} - L/2 \leq x \leq +L/2 \\ \\ u(x,t=0) = 0 & \text{per } x \leq -L/2 \text{ e } x \geq +L/2 \end{cases}$$

Consideriamo l'integrale di Fourier per questo treno d'onda, ovvero

$$u(x,t=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, a(k)\, e^{ikx} \ ,$$

dove

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, u(x,t=0)\, e^{-ikx} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{f_0}{2} \left[\int_{-L/2}^{+L/2} dx\, e^{-i(k-k_0)x} + \int_{-L/2}^{+L/2} dx\, e^{-i(k+k_0)x} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_0 \left[\frac{\sin[(k-k_0)L/2]}{k-k_0} + \frac{\sin[(k+k_0)L/2]}{k+k_0} \right] = \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_0 \frac{\sin[(k-k_0)L/2]}{k-k_0} \ , \end{aligned} \tag{1}$$

dove si sono usati i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{+a} e^{-i\kappa x}\, dx &= +\frac{1}{i\kappa} \int_{-i\kappa a}^{+i\kappa a} e^{-t}\, dt = \\ &= \frac{1}{i\kappa} \left(-e^{-i\kappa a} + e^{i\kappa a} \right) = 2\, \frac{\sin[\kappa a]}{\kappa} \ , \end{aligned}$$

dove $t = i\kappa x$. Per un lungo treno la trasformata di Fourier sarà concentrata intorno a k_0, cioè $k \approx k_0$ e quindi $\frac{1}{k-k_0} \gg \frac{1}{k+k_0}$.

Diamo una stima della "larghezza" Δk della trasformata di Fourier, ovvero una misura della larghezza dello spettro in k necessario per ricostruire il treno d'onda finito. Assumiamo come indicatore della larghezza la metà della distanza tra i primi due zeri della funzione (1), ovvero $(k-k_0)\frac{L}{2} = \pm\pi$, fissa $\Delta k \approx \frac{1}{2}[(k_0 + 2\pi/L) - (k_0 - 2\pi/L)] = 2\pi/L$. Nello spazio delle x la larghezza è individuabile tramite $\Delta x = L$. Si ottiene:

$$\Delta x \cdot \Delta k \approx 2\pi \ , \tag{2}$$

che conferma quanto già intuito: il pachetto nello spazio dei k è sempre più stretto quanto più è grande L. Al limite di lunghezza indefinita la trasformata individua la sola lunghezza d'onda λ_0.

Nel seguito vogliamo rendere più rigoroso il risultato (2) studiando un generico pacchetto unidimensionale.

Dimostreremo che

$$\Delta x \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2} \ .$$

disuguaglianza per un generico pacchetto d'onda

Definiamo

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \frac{1}{N^2} \int_{-\infty}^{+\infty} x\,|f(x)|^2\,dx = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x\,|f(x)|^2\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx} \\ &\text{e} \\ \Delta x &= \frac{1}{N}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x \rangle)^2\,|f(x)|^2\,dx\right]^{1/2} \end{aligned}$$

con $N^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx$.

Una definizione analoga varrà per lo spazio k:

$$\begin{aligned} \langle k \rangle &= \frac{1}{N^2} \int_{-\infty}^{+\infty} k\,|g(k)|^2\,dk = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} k\,|g(k)|^2\,dk}{\int_{-\infty}^{+\infty} |g(k)|^2\,dk} \\ &\text{e} \\ \Delta k &= \frac{1}{N}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} (k - \langle k \rangle)^2\,|g(k)|^2\,dk\right]^{1/2} \end{aligned}$$

dove $g(k)$ è la trasformata di Fourier di f $(g = FT(f))$. Si dimostrerà che

$$\Delta k \cdot \Delta x \geq \frac{1}{2} \ ,$$

ponendo così severi limiti reciproci sulle distribuzioni negli spazi k e x.

Senza perdita di generalità si può supporre $\langle k \rangle = \langle x \rangle = 0$ (infatti si può sempre effettuare un cambio di variabile $x \to x' = x - \langle x \rangle$ e $k \to k' = k - \langle k \rangle$ ed ovviamente $\langle k' \rangle = \langle x' \rangle = 0$). Si osservi inoltre che vale (qualunque valore **reale** assuma ϵ) la disuguaglianza

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| x\, f(x) + \epsilon \, \frac{df}{dx} \right|^2 \ dx \geq 0$$

essendo l'integrando positivo o nullo su tutto lo spazio.
Si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[x^2 \, |f(x)|^2 + \epsilon \, x \, \left(f^* \, \frac{df}{dx} + f \, \frac{df^*}{dx} \right) + \epsilon^2 \, \left| \frac{df}{dx} \right|^2 \right] \ dx \geq 0$$

dove f è supposta normalizzata ad unità, ovvero $f \to f/N.$ e quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx = 1$
Valgono le (i limiti di integrazione verranno indicato solo se differenti da $\int_{-\infty}^{+\infty}$)
1.
$\int x^2 \, |f(x)|^2 \, dx = \int (x - \langle x \rangle)^2 \, |f(x)|^2 \, dx = (\Delta x)^2$
2.
$\int x \, \left(f^* \, \frac{df}{dx} + f \, \frac{df^*}{dx} \right) \ dx = \int x \, \frac{d}{dx} \, |f|^2 \ dx = \left[x \, |f|^2 \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int |f|^2 \ dx = -1$ avendo supposto che $|f|^2$ vada rapidamente a zero così da rendere nullo il contributo esteso all'infinito: $\left[x \, |f|^2 \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$
3.
Considerando che la traformata di Fourier di una derivata è $FT\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{df}{dx} \, e^{-ikx} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f \, e^{-ikx} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (-ik) f \, e^{-ikx} \, dk = ikg(k)$ (assumendo che il primo termine sia nullo per il rapido decrescere di $f(x)$) anche il termine in ϵ^2 è calcolabile

$$
\begin{aligned}
\int \left|\frac{df}{dx}\right|^2 dx &= \int \left(\frac{df}{dx}\right) \left(\frac{df}{dx}\right)^* dx = \\
&= \int dx \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int ik\, g(k)\, e^{ikx}\, dk\right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int ik'\, g(k')\, e^{ik'x}\, dk'\right]^* = \\
&= \int dk\, dk'\, k\, k'\, g(k)\, g^*(k')\, \frac{1}{2\pi} \int dx\, e^{i(k-k')x} = \\
&= \int dk\, dk'\, k\, k'\, g(k)\, g^*(k')\, \delta(k-k') = \int dk\, k^2\, |g(k)|^2 = (\Delta k)^2 \ .
\end{aligned} \tag{3}
$$

Mettendo tutto insieme si ha per la disuguaglianza:

$$
(\Delta k)^2\, \epsilon^2 - \epsilon + (\Delta x)^2 \geq 0
$$

che sarà sempre soddisfatta per qualunque valore **reale** di ϵ solo se le radici della precedente equazione di secondo grado

$$
\epsilon_{1,2} = \frac{+\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - (\Delta x)^2 (\Delta k)^2}}{(\Delta k)^2}
$$

sono complesse coniugate, (o coincidenti per la condizione di uguaglianza a zer), ovvero

$$
(\Delta x)^2 (\Delta k)^2 - \frac{1}{4} \geq 0
$$

cioè

$$
(\Delta x) \cdot (\Delta k) \geq \frac{1}{2} \ .
$$