Velocità di gruppo

Consideriamo un pacchetto d'onda (in una dimensione per semplicità)

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, a(k)\, e^{i(kx-\omega(k)t)} \ ,$$

dove ω, ricordiamolo, è una funzione di k, $\omega(k)$. Supponiamo anche che il gruppo sia concentrato intorno a $k = k_0$ potremo scrivere:

$$\begin{aligned} k &= k_0 + k_1 = k_0 + (k - k_0) \ , \\ \omega(k) &= \omega_0 + \omega_1(k_1) = \omega_0 + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} (k - k_0) + ... \\ a(k) &= a(k_0 + k_1) = b(k_1) \end{aligned} \tag{1}$$

troncando lo sviluppo al primo ordine nell'ipotesi che $k_1 = k - k_0 \ll k_0$, perché il pacchetto è stato supposto concentrato intorno a k_0. Ne risulta

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1\, b(k_1)\, e^{i(k_0x-\omega_0t)}\, e^{i(k_1x-\omega_1(k_1)t)} = \\ &= \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1\, b(k_1)\, e^{i(k_1x-\omega_1(k_1)t)}\right]}\, e^{i(k_0x-\omega_0t)} = \\ &= \mathcal{A}(x,t)\, e^{i(k_0x-\omega_0t)} \ . \end{aligned}$$

Il termine $\underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1\, b(k_1)\, e^{i(k_1x-\omega_1(k_1)t)}\right]} = \mathcal{A}(x,t)$ rappresenta un ampiezza, che (a causa dell'ipotesi $\omega_1(k_1) \ll \omega_0$) varia molto lentamente rispetto a ω_0 e quindi all'onda di cui è ampiezza.

Definiamo **velocità di gruppo** la velocità con cui un determinato valore di $\mathcal{A}(x,t)$ (ad esempio il suo massimo), avanza. Questa proprietà è caratterizzata da un valore costante $\mathcal{A}(x,t) = \text{costante}$, ovvero $\frac{d\mathcal{A}}{dt} = 0$ e svolgendo la derivata

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = 0 \ . \tag{2}$$

Per definizione la velocià di gruppo è tale che

$$v_g = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{\mathcal{A}=\text{costante}} = -\frac{\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}}{\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x}}$$

dove abbiamo usato la (2). Quindi, poiché

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} &= -i\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1(k_1)\,dk_1\,b(k_1)\,e^{i(k_1 x-\omega_1(k_1)t)}\ ; \\
\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} &= +i\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} k_1\,dk_1\,b(k_1)\,e^{i(k_1 x-\omega_1(k_1)t)}\ ,
\end{aligned}$$

e (dalla (1))

$$-\omega_1(k_1) = \omega_0 - \omega(k) \approx \omega_0 - \left(\omega_0 - \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} k_1\right)\ ,$$

si ottiene

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = -\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} \cdot \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}$$

ovvero

$$v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}\ .$$

Consideriamo la velocità di fase e di gruppo per un'onda elettromagnetica che si propaga in un mezzo dispersivo ad indice di rifrazione (parte reale) $n(\omega)$.

$$v_{\mathrm{fase}} = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{c}{n(\omega)}\ , \tag{3}$$

se c è la velocità di fase nel vuoto.

La velocità di gruppo $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ può anche essere scritta in funzione di ω in questo modo (dalla(3) $k = \frac{1}{c}\,\omega\,n(\omega)$),

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{c}\,\frac{d}{d\omega}\,[\omega\,n(\omega)]\right)^{-1} = \left(\frac{1}{c}\left[n(\omega) + \omega\,\frac{dn(\omega)}{d\omega}\right]\right)^{-1} \tag{4}$$

ovvero

$$v_g = \frac{c}{\left[n(\omega) + \omega\,\frac{dn(\omega)}{d\omega}\right]}$$

Nel caso in cui l'indice di rifrazione sia quello di un plasma di frequenza propria ω_p e N elettroni liberi per unità di volume ($\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m_e\epsilon_0}$) si ricorda che

$$n(\omega) = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} < 1 \ \text{ per } \ \omega > \omega_p\ .$$

In questa regione di grandi ω la velocità di fase (vedi (3))

$$v_{\text{fase}} = \frac{c}{n(\omega)} \ > c \ !!$$

mentre la velocità di gruppo risulta (si noti che $\omega \frac{dn}{d\omega} = \frac{\omega_p^2}{\omega^2 \sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$)

$$v_g = \frac{c}{\left[n(\omega) + \omega \, \frac{dn(\omega)}{d\omega}\right]} = c\sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} \ < c \ !$$