**Velocità di gruppo**

Consideriamo un pacchetto d'onda (in una dimensione per semplicità)

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, a(k)\, e^{i(kx-\omega(k)t)} \ ,$$

dove $\omega$, ricordiamolo, è una funzione di $k$, $\omega(k)$. Supponiamo anche che il gruppo sia concentrato intorno a $k = k_0$ potremo scrivere:

$$\begin{aligned} k &= k_0 + k_1 = k_0 + (k - k_0) \ , \\ \omega(k) &= \omega_0 + \omega_1(k_1) = \omega_0 + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} (k-k_0) + .... \\ a(k) &= a(k_0 + k_1) = b(k_1) \end{aligned} \tag{1}$$

troncando lo sviluppo al primo ordine nell'ipotesi che $k_1 = k - k_0 \ll k_0$, perché il pacchetto è stato supposto concentrato intorno a $k_0$. Ne risulta

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1\, b(k_1)\, e^{i(k_0x-\omega_0 t)}\, e^{i(k_1x-\omega_1(k_1)t)} = \\ &= \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1\, b(k_1)\, e^{i(k_1x-\omega_1(k_1)t)}\right]}\, e^{i(k_0x-\omega_0 t)} = \\ &= \mathcal{A}(x,t)\, e^{i(k_0x-\omega_0 t)} \ . \end{aligned}$$

Il termine $\underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1\, b(k_1)\, e^{i(k_1x-\omega_1(k_1)t)}\right]} = \mathcal{A}(x,t)$ rappresenta un ampiezza, che (a causa dell'ipotesi $\omega_1(k_1) \ll \omega_0$) varia molto lentamente rispetto a $\omega_0$ e quindi all'onda di cui è ampiezza.

Definiamo **velocità di gruppo** la velocità con cui un determinato valore di $\mathcal{A}(x,t)$ (ad esempio il suo massimo), avanza. Questa proprietà è caratterizzata da un valore costante $\mathcal{A}(x,t) =$ costante, ovvero $\frac{d\mathcal{A}}{dt} = 0$ e svolgendo la derivata

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = 0 \ . \tag{2}$$

Per definizione la velocià di gruppo è tale che

$$v_g = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{\mathcal{A}=\text{costante}} = -\frac{\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}}{\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x}}$$

dove abbiamo usato la (2). Quindi, poiché

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} &= -i\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1(k_1)\, dk_1\, b(k_1)\, e^{i(k_1x-\omega_1(k_1)t)} \ ; \\ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} &= +i\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} k_1\, dk_1\, b(k_1)\, e^{i(k_1x-\omega_1(k_1)t)} \ , \end{aligned}$$

e (dalla (1))

$$-\omega_1(k_1) = \omega_0 - \omega(k) \approx \omega_0 - \left(\omega_0 - \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} k_1\right) \ ,$$

si ottiene

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = -\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} \cdot \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}$$

ovvero

$$v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} .$$

Consideriamo la velocità di fase e di gruppo per un'onda elettromagnetica che si propaga in un mezzo dispersivo ad indice di rifrazione (parte reale) $n(\omega)$.

$$v_{\text{fase}} = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{c}{n(\omega)} \ , \tag{3}$$

se $c$ è la velocità di fase nel vuoto.

La velocità di gruppo $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ può anche essere scritta in funzione di $\omega$ in questo modo (dalla(3) $k = \frac{1}{c}\,\omega\, n(\omega)$),

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{c}\,\frac{d}{d\omega}\left[\omega\, n(\omega)\right]\right)^{-1} = \left(\frac{1}{c}\left[n(\omega) + \omega\,\frac{dn(\omega)}{d\omega}\right]\right)^{-1} \tag{4}$$

ovvero

$$v_g = \frac{c}{\left[n(\omega) + \omega\,\frac{dn(\omega)}{d\omega}\right]}$$

**esempio 1: plasma**

Nel caso in cui l'indice di rifrazione sia quello di un plasma di frequenza propria $\omega_p$ e $N$ elettroni liberi per unità di volume ($\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m_e\epsilon_0}$) si ricorda che

$$n(\omega) = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} < 1 \ \text{ per } \ \omega > \omega_p \ .$$

In questa regione di grandi $\omega$ la velocità di fase (vedi (3))

$$v_{\text{fase}} = \frac{c}{n(\omega)} \ > c \ !!$$

mentre la velocità di gruppo risulta (si noti che $\omega\frac{dn}{d\omega} = \frac{\omega_p^2}{\omega^2\sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$)

$$v_g = \frac{c}{\left[n(\omega) + \omega\,\frac{dn(\omega)}{d\omega}\right]} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} \ < c \ !$$

**esempio 2: indice di rifrazione nei materiali poco densi**

Riprendiamo le espressioni della parte reale (e immaginaria) dell'indice di rifrazione cacolata nel modello a elettroni oscillanti.

$$\begin{aligned} n_R &= 1 + \frac{1}{2}\,\frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e}\,\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \ , \\ n_I &= \quad\ \frac{1}{2}\,\frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e}\,\frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \gamma^2\ \omega^2} \ . \end{aligned} \tag{5}$$

La velocita di fase

$$v_{phase} = \frac{c}{n_R(\omega)}$$

risulta minore della velocità della luce nel vuoto solo se $\omega < \omega_0$ per $\omega > \omega_0$ $v_{phase} > c$ perché $n_R(\omega) < 1$. In particolare per

$$\lim_{\omega \gg \omega_0} n_R(\omega) = 1 - \frac{1}{2}\,\frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e}\,\frac{1}{\omega^2} \ < 1 \, .$$

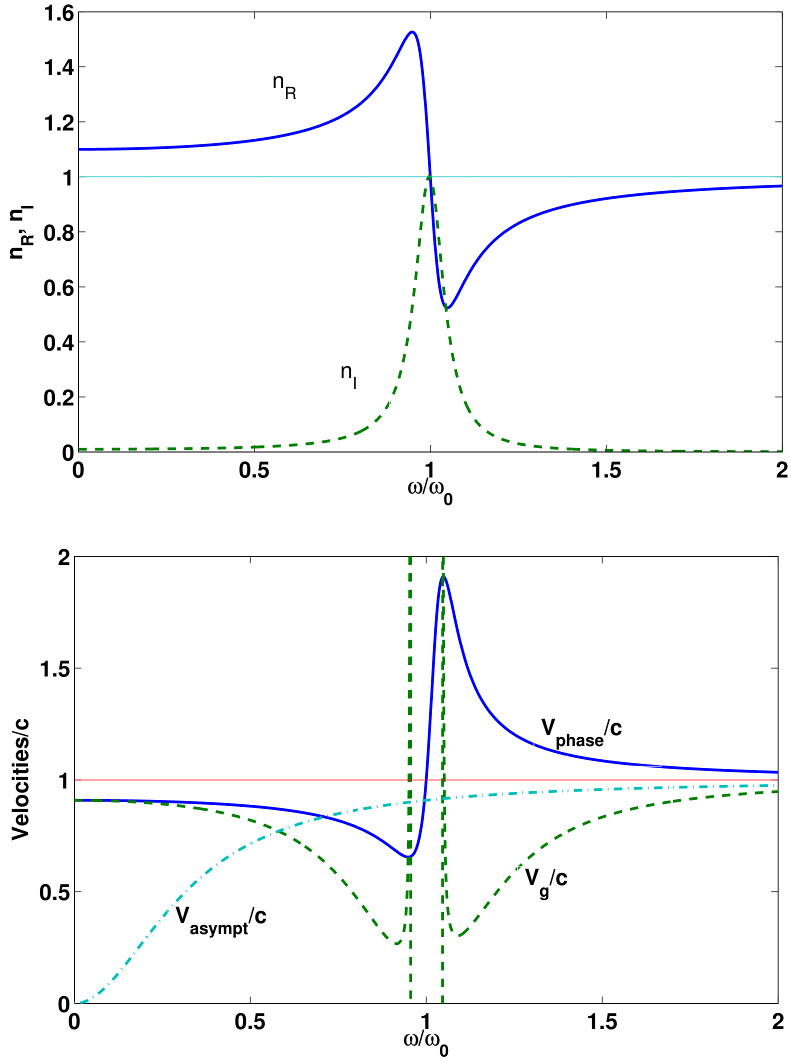


FIG. 1. **figura in alto:** L'indice di rifrazione in materiali poco densi: disegno qualitativo e valori arbitrari dei parametri. $n_R$: parte reale, $n_I$: parte immaginaria.
**figura in basso:** Le velocità di fase ($v_{phase}$) e di gruppo ($v_g$) relative alla figura sopra e rapportate alla velocità della luce nel vuoto, $c$. Per completezza si riporta (curva linea-punto) la velocità asintotica $v_{asympt}$).

D'altra parte la velocità di gruppo

$$v_g = \frac{c}{\left[ n(\omega) + \omega \, \frac{dn(\omega)}{d\omega} \right]} \,, \tag{6}$$

non è necessariamente maggiore di $c$. In Figura1 i risultati. Insieme agli andamenti per $n_R(\omega)$ ed $n_I(\omega)$ (parte superiore), si mostrano le velocità di fase, la velocità di gruppo di equazione (6) e la velocità di gruppo asintotica utilizzando l'espressione per il $\lim_{\omega \gg \omega_0}$ per $n_R$. Nella stragrande maggioranza delle zone la velocità di gruppo si discosta molta dalla veloctà di fase e rimane minore di $c$, come deve la velocità del segnale. Dunque nel limite in cui lo sviluppo al primo ordine intorno a $k_0$ della relazione di dispersione risulta essere una buona approssimazione, la velocità del segnale può essere identificata con la velocità di gruppo. Resta problematica la zona (molto stretta) compresa tra $\omega_0 - \gamma$ ed $\omega_0 + \gamma$. In questa zona la velocità del segnala va ricalcolata con prescrizioni ad hoc dato che le le variazioni di $n_R$ con $\omega$ sono molto grandi ed è da supporre che il primo termine dello sviluppo non sia sufficiente ad approssimare $\omega(k)$.