Esercizi sulla cinemetica relativistica

Consideriamo i due processi per la produzione di antiprotoni

$$
\begin{aligned}
e^+ + e^- &\rightarrow p + \bar{p} \ , && (1)\\
p + p &\rightarrow p + p + p + \bar{p} \ . && (2)
\end{aligned}
$$

Per entrambi si calcoli l'energia cinetica di soglia del processo sia nel sistema di centro di massa (realizzato in acceleratori a fasci incrociati), sia nel sistema di laboratorio in cui una delle particelle nello stato iniziale risulta a riposo (fascio di particelle su targhetta fissa).

Se l'urto di due particelle, ognuna di massa M è osservato da un sistema di riferimento in cui l'urto è centrale con quantità di moto uguale ed opposta, diciamo che siamo nel sistema di centro di massa. L'energia totale sia E_{cm}. Mostriamo che:

$$W^2 = c^2\,(p_A + p_B)_\mu (p_A + p_B)^\mu = c^2\,(p_A + p_B)^2 = E^2_{cm}$$

dove W è invariante per trasformazioni di Lorentz (si chiama massa invariante).
Nel CM:

$$
\begin{aligned}
cp_A &= (E_A, c\mathbf{p}) = (\sqrt{c^2\mathbf{p}^2 + M^2c^4}, c\mathbf{p}) \ ,\\
cp_B &= (E_B, -c\mathbf{p}) = (\sqrt{c^2\mathbf{p}^2 + M^2c^4}, -c\mathbf{p}) \ .
\end{aligned}
$$

Nel LAB:

$$
\begin{aligned}
cp_A &= (E_A, c\mathbf{p}_A) = (E, \hat{\mathbf{p}}_A\sqrt{E^2 - M^2c^4}) \ ,\\
cp_B &= (E_B, c\mathbf{p}_B) = (Mc^2, \vec{0}) \ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W^2 &= c^2\,(p_A + p_B)^2_{cm} = (E_A + E_B)^2 - c^2(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)^2 = (E_A + E_B)^2 \equiv E^2_{cm} \ ,\\
W^2 &= c^2\,(p_A + p_B)_{LAB} = (E + Mc^2)^2 - (\sqrt{E^2 - M^2c^4})^2 =\\
&= E^2 + 2EMc^2 + M^2c^4 - E^2 + M^2c^4 = 2Mc^2\,(E + Mc^2) \ .
\end{aligned}
$$

L'invarianza di W^2 implica

$$E^2_{cm} = 2Mc^2\,(E + Mc^2)$$

ovvero

$$E = \frac{E_{cm}^2}{2Mc^2} - Mc^2 \ . \tag{3}$$

Gli acceleratori a fasci incrociati hanno dunque un enorme vantaggio rispetto a quelli a targhetta fissa (dal punto di vista energetico), raggiungendo un'energia totale nel centro di massa $E_{cm} = \sqrt{W^2}$.

Applichiamo ora quel che abbiamo imparato alle due reazioni (1),(2).

Reazione (1) nel centro di massa.
La soglia è fissata da: $E_{cm} = E_A + E_B \geq 2M_pc^2$. Siccome $E_{cm} = 2E_e = 2(T_e + m_ec^2) \geq 2M_pc^2$ le energie cinetiche di soglia del sistema elettrone positrone devono essere tali che : $T_e + m_ec^2 = E_{cm}/2 \geq M_pc^2$ ovvero

$$T_{e^-} + T_{e^+} \geq 2\left(M_pc^2 - m_ec^2\right) \approx 1.9 \times 10^3 \text{ MeV} \ .$$

Nel caso del laboratorio e supponenndo e^- a riposo, si ha dalla (3)

$$E_{e^+} = T_{e^+} + m_ec^2 \geq \frac{(2M_pc^2)^2}{2m_ec^2} - m_ec^2 \ ,$$

ovvero

$$T_{e^+} \geq \frac{(2M_pc^2)^2}{2m_ec^2} - 2m_ec^2 \approx 3.5 \times 10^6 \text{ MeV} \ .$$

Reazione (2) nel centro di massa.
La sogia è fissata da: $E_{cm} \geq 4M_pc^2$. Quindi

$$T_p + T_p \geq (4M_pc^2 - 2M_pc^2) \approx 1.9 \times 10^3 \text{ MeV} \ .$$

Nel caso del laboratorio e supponenndo un protone a riposo, si ha dalla (3)

$$E_p = T_p + M_pc^2 \geq \frac{(4M_pc^2)^2}{2M_pc^2} - M_pc^2 \ ,$$

ovvero

$$T_p \geq 6M_pc^2 \approx 5.7 \times 10^3 \text{ MeV} \ .$$