Larghezza naturale della riga emessa

A causa dell'energia elettromagnetica emessa da un oscillatore carico, la radiazione emessa dallo stesso oscillatore, non è monocromatica. Dall'equazione dell'oscillatore

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \ ,$$

il moto si riduce (per opportune condizioni iniziali) a

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\, e^{-i\omega_0 t} \ , \tag{1}$$

dove il valore di γ derivato dallo smorzamento radiativo, (cioè dalla perdita di energia meccanica a causa della radiazione emessa) risulta (dalle lezioni sull'argomento, vedi bibliografia del corso ed appendice qui annessa):

$$\gamma = \frac{2}{3}\frac{k_e e^2}{m_e c^3}\omega_0^2 \ .$$

La larghezza della riga spettrale emessa può essere ricavata da un'analisi di Fourier dei campi che sono proporzionali (nel limite $\gamma \ll \omega_0$) alla (1), ovvero[1]

$$E(t) = E_0\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}\, e^{-i\omega_0 t} \ . \tag{2}$$

Ne segue

$$\begin{aligned} E(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} E(t)\, e^{i\omega t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} E_0\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}\, e^{-i\omega_0 t}\, e^{i\omega t}\, dt \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{i(\omega-\omega_0)-\frac{\gamma}{2}} \end{aligned}$$

corrispondente ad un'intensità di radiazione $I(\omega) \sim |E(\omega)|^2$

$$I(\omega) = I_0\frac{\gamma}{2\pi}\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\frac{\gamma^2}{4}}$$

e normalizzata in modo tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} I(\omega)d\omega = I_0$. La larghezza della riga $\Delta\omega$, misurata a metà altezza, risulta

$$\Delta\omega \approx \gamma = \frac{2}{3}\frac{k_e e^2}{m_e c^3}\omega_0^2 \ . \tag{3}$$

[1] Per essere precisi il campo elettrico è proporzionale a $\ddot{x}$, ma nel limite $\gamma \ll \omega_0$, la derivata seconda della (1), $\ddot{x} = x_0(-i\omega_0 - \gamma/2)^2\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}\, e^{-i\omega_0 t} \approx -x_0\,\omega_0^2\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}\, e^{-i\omega_0 t} \sim E_0\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}\, e^{-i\omega_0 t}$, come espresso dalla (2).

La stessa larghezza espressa in funzione della lunghezza d'onda è [2]

$$|\Delta\lambda| = 2\pi c \frac{\Delta\omega}{\omega_0^2} = \frac{4\pi}{3}\frac{k_e e^2}{m_e c^2} = \frac{4\pi}{3} r_0 \approx 10^{-12} \text{ cm} ,$$

ed è costante ed indipendente dalla frequenza dell'oscillatore. In pratica lo smorzamento radiativo non è la sola causa di allargamento della riga spettrale: interruzioni del treno d'onda dovute a collisioni tra atomi e l'effetto Doppler contribuiscono ad allargare le righe spettrali.
La relazione (3), scrivibile anche:

$$\Delta\omega \cdot \gamma^{-1} = \Delta\omega \cdot \tau \approx 1$$

tra la larghezza (radiativa) della riga e la vita media (radiativa $\tau = \gamma^{-1}$) dello stato, equivale alla relazione

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar , \tag{4}$$

se $\Delta E = \hbar\Delta\omega$. La (4) è la relazione quantistica tra la vita media e la larghezza in energia di uno stato.

Appendice

La reazione di radiazione (gli effetti dell'emissione di radiazione sullo stesso oscillatore) sono un argomento difficile da affrontare in generale, ma possono essere stimati in modo semplice nel caso di un moto periodico dell'elettrone. Si può così stimare la forma meccanica sull'elettrone dovuta all'emissione. Assumendo che la forza viscosa sia interamente dovuta alla perdita di energia per radiazione si ha che la potenza viscosa mediata sul ciclo deve uguagliare la perdita in potenza per emissione di radiazione

$$\langle -\gamma \dot{x}\dot{x} \rangle + \frac{2}{3}\frac{k_e e^2}{c^3}\langle (\ddot{x})^2 \rangle = 0 .$$

In ogni ciclo gli effetti dovuti alla forza viscosa sono molto piccoli ($\gamma \ll \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$) e la la parte reale dell soluzione (1) può essere scritta

$$\Re\, x(t) \approx x_0 \cos\omega_0 t ,$$

[2]Si noti che $\lambda \cdot \omega = 2\pi c$ e quindi che $\Delta\lambda \cdot \omega + \lambda \cdot \Delta\omega = 0$

da cui

$$\langle -\gamma \dot{x}^2 \rangle \approx -\gamma x_0^2 \, \omega_0^2 \, \frac{1}{2}$$

e

$$\frac{2}{3} \frac{k_e e^2}{c^3} \langle \ddot{x}^2 \rangle = \frac{2}{3} \frac{k_e e^2}{c^3} \, x_0^2 \, \frac{1}{2} \, \omega_0^4 \ .$$

Così si ottiene

$$\frac{2}{3} \frac{k_e e^2}{c^3} \, x_0^2 \, \frac{1}{2} \, \omega_0^4 \approx \gamma \, x_0^2 \, \omega_0^2 \, \frac{1}{2}$$

ovvero

$$\gamma \approx \frac{2}{3} \frac{k_e e^2}{c^3} \, \omega_0^2 \qquad (5)$$