# Riflessione e rifrazione tra due mezzi omogenei isotropi non conduttori

Vogliamo descrivere i fenomeni dovuti ad un'onda elettromagnetica piana (polarizzata linearmente[1]), monocromatica, incidente su di una superficie (piana) che separa due mezzi isotropi ed omogenei, non conduttori, vogliamo, cioè, identificare le leggi che governano la riflessione e la rifrazione di onde elettromagnetiche.

Immaginiamo una superficie di separazione tra due mezzi dielettrici omogenei ed isotropi schematizzata dal piano di equazione $x = 0$. Sia $\hat{\mathbf{n}} = (1, 0, 0)$ il versore che la caratterizza e normale ad essa. Il **piano di incidenza** è individuato dal vettore d'onda dell'onda elettromagnetica **piana** incidente $\mathbf{k}$ e dal versore $\hat{\mathbf{n}}$ (nel caso presente il piano di incidenza coincida col piano $(x, y)$).
In presenza di materia (come nel nostro caso), le equazioni di Maxwell a cui i campi elettrici e magnetici delle onde presenti debbono ubbidire, sono scrivibili

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varrho_{\text{lib}} \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{lib}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{4}$$

dove assumiamo che $\varrho_{\text{lib}} = 0$ e $\mathbf{j}_{\text{lib}} = 0$ (i mezzi non sono sedi di cariche e correnti libere). Inoltre supponiamo valgano (con buon grado di approssimazione) le

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\, \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \tag{5}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0\, \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}\ . \tag{6}$$

$$\tag{7}$$

Le precedenti equazioni implicano che nel piano $x = 0$ di separazione tra la regione 1 e la regione 2, debbono valere le condizioni di seguito elencate:

$$\mathbf{E}_{1//} = \mathbf{E}_{2//} \quad \text{ovvero} \quad (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \left[\text{da} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right]\ , \tag{8}$$

$$\mathbf{D}_{1\perp} = \mathbf{D}_{2\perp} \quad \text{ovvero} \quad (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad [\text{da} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0]\ , \tag{9}$$

$$\mathbf{H}_{1//} = \mathbf{H}_{2//} \quad \text{ovvero} \quad (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \left[\text{da} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right]\ , \tag{10}$$

$$\mathbf{B}_{1\perp} = \mathbf{B}_{2\perp} \quad \text{ovvero} \quad (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad [\text{da} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0]\ . \tag{11}$$

dove

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r\ , \tag{12}$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_t\ , \tag{13}$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_i + \mathbf{B}_r\ , \tag{14}$$

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_t\ . \tag{15}$$

[1]Discuteremo i due casi di polarizzazzione lineare **perpendicolare** al piano di incidenza e **parallela** al piano di incidenza come sotto specificato. Ogni altra polarizzazione dell'onda piana incidente risulterà combinazione lineare delle due discusse.

ed i campi incidenti, riflessi e trasmessi, sono espressi (in generale):

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 \, e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \, , \qquad \mathbf{B}_i = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_i}{\omega} \, , \tag{16}$$

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E'}_0 \, e^{i(k'_x x + k'_y y - \omega' t)} \, , \qquad \mathbf{B}_r = \frac{\mathbf{k}' \times \mathbf{E}_r}{\omega'} \, , \tag{17}$$

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E''}_0 \, e^{i(k''_x x + k''_y y - \omega'' t)} \, , \quad \mathbf{B}_t = \frac{\mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_t}{\omega''} \, . \tag{18}$$

## Un esempio di applicazione delle condizioni al contorno

Come esempio di applicazione delle condizioni al contorno (8)-(11), discutiamo la condizione (8) **nel caso in cui il campo elettrico incidente sia perpendicolare al piano di incidenza**, ovvero

$$\mathbf{E}_i = \hat{z} \, E_0 \, e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \, , \tag{19}$$

e lungo la stessa direzione risulteranno i campi elettrici riflesso e trasmesso. In questo caso, quindi, i vettori campo elettrico **risultano paralleli al piano di separazione** e la (8) è perciò valida per il modulo dei campi elettrici, ovvero:

$$\left[ E_0 \, e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} + E'_0 \, e^{i(k'_x x + k'_y y - \omega' t)} \right]_{x=0} = \left[ E''_0 \, e^{i(k''_x x + k''_y y - \omega'' t)} \right]_{x=0} \, . \tag{20}$$

La condizione (20) deve valere per tutti gli istanti ed in tutti i punti del piano $x = 0$, in particolare nel punto $y = 0$ dove si riduce

$$E_0 \, e^{-i\omega t} + E'_0 \, e^{-i\omega' t} = E''_0 \, e^{-i\omega'' t} \, . \tag{21}$$

Deve quindi valere

$$\omega = \omega' = \omega'' \, , \tag{22}$$

perché resti valida la condione al contorno per ogni istante $t$.
Che la frequenza non cambi è conseguenza fisica del fatto che la frequenza è fissata dalla sorgente che emette la radiazione elettromagnetica e la (22) è indipendente dalla particolare condizione al contorno (8) nel cui contesto è stata ricavata. Anzi, **qualsiasi condizione al contorno**, perché resti valida ad ogni istante, implica la (22). È inoltre da rilevare che la stessa condizione deve essere valida per ogni punto del piano di separazione, ovvero (dalla (20) e dalla (22))

$$E_0 \, e^{i(k_y y - \omega t)} + E'_0 \, e^{i(k'_y y - \omega t)} = E''_0 \, e^{i(k''_y y - \omega t)} \, , \tag{23}$$

da cui

$$k_y = k'_y = k''_y \, , \tag{24}$$

condizione indipendente dal contesto in cui è stata ricavata e legata anch'essa a condizioni al contorno qualunque.
D'altra parte essendo valida la

$$\mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \, \mu_r \epsilon_r = \frac{\omega^2}{c^2} \, n^2 \, ,$$

per tutte le onde piane propagantesi in un mezzo dielettrico omogeneo di costanti dielettrica e magnetica relative $\epsilon_r$, $\mu_r$, ovvero di indice di rifrazione $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$, valgono le

$$\frac{\mathbf{k}^2}{n_1^2} = \frac{\mathbf{k}'^2}{n_1^2} = \frac{\mathbf{k}''^2}{n_2^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \tag{25}$$

che insieme alle (24) danno

$$k_x^2 = {k'_x}^2 \quad \Rightarrow k'_x = -k_x \ ;$$

ovvero che gli angoli di incidenza ($\vartheta_i$) e di riflessione ($\vartheta_r$), sono uguali

$$\cos\vartheta_i = \frac{k_x}{|\mathbf{k}|} = \cos\vartheta_r = \frac{k'_x}{|\mathbf{k}'|} \ .$$

Anche la legge di Snell segue dalle stesse proprietà dovute alla presenza di condizioni al contorno per $x = 0$, infatti dalla (25) si deduce

$$\frac{\mathbf{k}''^2}{n_2^2} = \frac{\mathbf{k}^2}{n_1^2} \tag{26}$$

ovvero, sfruttando le (24)

$$k_x''^2 = \frac{n_2^2}{n_1^2}\mathbf{k}^2 - k_y^2 \ , \tag{27}$$

relazione che lega il numero d'onda trasmesso a quello incidente e che resta vera anche nel caso in cui gli indici di rifrazione risultino complessi. Una relazione più semplice è implicata nel caso in cui i numeri d'onda e gli indici di rifrazione risultino reali, come in molti casi di materiali trasparenti alle frequenze ottiche. In tale caso infatti valgono le

$$\sin\vartheta_t = \frac{k''_y}{|\mathbf{k}''|} \qquad \sin\vartheta_i = \frac{k_y}{|\mathbf{k}|} \ ,$$

ovvero, dalle (26),

$$\frac{k_y''^2}{n_2^2 \sin^2\vartheta_t} = \frac{{k_y}^2}{n_1^2 \sin^2\vartheta_i}$$

e sfruttando l'uguaglianza (24)

$$n_2 \sin\vartheta_t = n_1 \sin\vartheta_i \ . \tag{28}$$

**osservazione**
Potremmo affermare (invertendo il ragionamento fatto a scopo didattico) che le fasi dei campi in $x = 0$ **debbono risultare le stesse** perché le conzioni al contorno debbono valere per tutti i punti di coordinata $y$ ed a tutti gli istanti, qualunque siano queste condizioni. In particolare deve valere

$$[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}]_{x=0} = [\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}]_{x=0} = [\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r}]_{x=0} \ ,$$

le quali implicano che:

i) i vettori $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$ e $\mathbf{k}''$ debbono giacere sullo stesso piano (il piano di incidenza);

ii) $\vartheta_i = \vartheta_r$, l'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione;

iii) vale la legge di Snell per l'onda trasmessa.

In conclusione, visto che sul piano di separazione le fasi sono uguali, potremmo riscrivere le condizioni (8) - (11) in funzione delle ampiezze dei campi elettrici incidente, riflesso e trasmesso, sfruttando anche le relazioni per i campi magnetici, vedi (16) - (18). Si ottiene:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_{1\,//} &= \mathbf{E}_{2\,//} \quad \rightarrow \quad [\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0' - \mathbf{E}_0''] \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \ , && (29)\\
\mathbf{D}_{1\,\perp} &= \mathbf{D}_{2\,\perp} \quad \rightarrow \quad [\epsilon_1 (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0') - \epsilon_2 \mathbf{E}_0''] \cdot \hat{\mathbf{n}} \ = \ 0 \ , && (30)\\
\mathbf{H}_{1\,//} &= \mathbf{H}_{2\,//} \quad \rightarrow \quad \left[\frac{1}{\mu_1} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0') - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0''\right] \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \ , && (31)\\
\mathbf{B}_{1\,\perp} &= \mathbf{B}_{2\,\perp} \quad \rightarrow \quad [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0' - \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0''] \cdot \hat{\mathbf{n}} \ = \ 0 \ . && (32)
\end{aligned}
$$

Sfrutteremo le condizioni appena elencate per trovare (nei diversi casi di polarizzazione) i campi riflessi e trasmessi in funzione dei campi incidenti.

## Ampiezze dei campi trasmesso e riflesso nel caso di incidenza perpendicolare ($\perp$): ovvero campo elettrico polarizzato perpendicolarmente al piano di incidenza

In questo caso

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_0 &= E_0 \, \hat{z} \ , \\
\mathbf{E}_0' &= E_0' \, \hat{z} \ , \\
\mathbf{E}_0'' &= E_0'' \, \hat{z} \ ; && (33)
\end{aligned}
$$

il campo elettrico incidente è tutto lungo l'asse $\hat{z}$, ovvero perpendicolare al piano $(x, y)$ scelto come piano di incidenza. La relazione (29) si riduce ad una relazione tra i moduli dei campi come già discusso; si ottiene:

$$
E_0 + E_0' = E_0'' \ . \tag{34}
$$

Abbiamo bisogno di una seconda equazione per trovare $E_0'$ ed $E_0''$ in funzione di $E_0$, utilizziremo la (31). È immediato verificare che con le condizioni (33), $\hat{\mathbf{n}} = (1, 0, 0)$ e l'uguaglianza $(\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{E}_0 \ (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{n}}) - \mathbf{k} \, (\mathbf{E}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}}) = \mathbf{E}_0 \ (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{n}}) = \hat{z} E_0 k_x$, si ha

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_1} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) \times \hat{\mathbf{n}} &= \left[0, \ 0, \ \frac{1}{\mu_1} k_x E_0\right] = \left[0, \ 0, \ +\frac{1}{\mu_1} k E_0 \cos\vartheta_i\right] \ , \\
\frac{1}{\mu_1} (\mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0') \times \hat{\mathbf{n}} &= \left[0, \ 0, \ \frac{1}{\mu_1} k_x' E_0'\right] = \left[0, \ 0, \ -\frac{1}{\mu_1} k' E_0' \cos\vartheta_r\right] \ , \\
\frac{1}{\mu_2} (\mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0'') \times \hat{\mathbf{n}} &= \left[0, \ 0, \ \frac{1}{\mu_2} k_x'' E_0''\right] = \left[0, \ 0, \ +\frac{1}{\mu_2} k'' E_0'' \cos\vartheta_t\right] \ ,
\end{aligned}
$$

dove la seconda serie di uguaglianze contenenti la funzione coseno, è valida se i $k$ sono reali. Inoltre, dato che, il numero d'onda è legato all'indice di rifrazione $n$ (da non confondere con il versore $\hat{\mathbf{n}}$.....)

$$
k = \frac{\omega}{c} n \ ,
$$

potremmo scrivere la (31)

$$
\frac{1}{\mu_1} (E_0 - E_0') \ k_x - \frac{1}{\mu_2} E_0'' \, k_x'' = 0 \tag{35}
$$

ovvero

$$\frac{1}{\mu_1}\left(E_0 - E_0'\right) n_1 \cos\vartheta_i - \frac{1}{\mu_2} E_0'' n_2 \cos\vartheta_t = 0 \ , \tag{36}$$

che è la seconda equazione cercata. Le due si combianano per dare

$$\left.\frac{E_0'}{E_0}\right|_\perp = \frac{n_1\cos\vartheta_i - \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2\cos\vartheta_t}{n_1\cos\vartheta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2\cos\vartheta_t} = \frac{n_1\cos\vartheta_i - \frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\vartheta_i}}{n_1\cos\vartheta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\vartheta_i}} \tag{37}$$

$$\left.\frac{E_0''}{E_0}\right|_\perp = \frac{2\, n_1\cos\vartheta_i}{n_1\cos\vartheta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2\cos\vartheta_t} = \frac{2\, n_1\cos\vartheta_i}{n_1\cos\vartheta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\vartheta_i}} \ . \tag{38}$$

Le seconde relazioni sono ottenute integrando la legge di Snell nelle prime

$$n_2\cos\vartheta_t = \sqrt{(n_2\cos\vartheta_t)^2} = \sqrt{n_2^2 - n_2^2\sin^2\vartheta_t} = \sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\vartheta_i} \ , \tag{39}$$

in modo da rendere il secondo membro solo funzione dell'angolo di incidenza.

**esercizio**
Utilizzando la legge di Snell verificare che (se $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$)

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{n_1\cos\vartheta_i - \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2\cos\vartheta_t}{n_1\cos\vartheta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2\cos\vartheta_t} = \frac{\sin(\vartheta_i - \vartheta_t)}{\sin(\vartheta_i + \vartheta_t)} \ .$$

Si può notare che valgono le relazioni

$$\lim_{\vartheta_i = 0} \left.\frac{E_0'}{E_0}\right|_\perp = \frac{n_1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2}{n_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \ \text{ se } \mu_1 = \mu_2 = \mu_0 \ ; \tag{40}$$

$$\lim_{\vartheta_i = 0} \left.\frac{E_0''}{E_0}\right|_\perp = \frac{2\, n_1}{n_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2} = \frac{2\, n_1}{n_1 + n_2} \ \text{ se } \mu_1 = \mu_2 = \mu_0 \ ; \tag{41}$$

che, pur essendo limitate ad angoli di incidenza nulli, valgono anche nel caso di indici di rifrazione complessi. Per esercizio si può infatti dimostrare che per $\vartheta_i = 0$, le due condizioni (34) e (35), che valgono in generale, nel caso $\vartheta_i = 0$ generano i risultati discussi (40),(41). Infatti, in caso di incidenza a $\vartheta_i = 0$, si ha $k_x = k = (\omega/c)n_1$, $k_x'' = k'' = (\omega/c)n_2$ che inseriti nella (35) e tenuto conto della (34) danno il risultato desiderato. Inoltre valgono le

$$\lim_{\vartheta_i \to \pi/2} \left.\frac{E_0'}{E_0}\right|_\perp \ \to \ -1 \ ; \tag{42}$$

$$\lim_{\vartheta_i \to \pi/2} \left.\frac{E_0''}{E_0}\right|_\perp \ \to \ 0 \ . \tag{43}$$

## Ampiezze dei campi trasmesso e riflesso nel caso di incidenza parallela (//): ovvero campo elettrico polarizzato lungo il piano di incidenza

In questo caso

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_0 &= \hat{x}\,E_{0x} + \hat{y}\,E_{0y}\ ,\\ \mathbf{E}'_0 &= \hat{x}\,E'_{0x} + \hat{y}\,E'_{0y}\\ \mathbf{E}''_0 &= \hat{x}\,E''_{0x} + \hat{y}\,E''_{0y}\ ;\end{aligned} \tag{44}$$

e

$$\mathbf{E}_0 \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{E}_0 \times \hat{x} = -\hat{z}E_{0y} = -\hat{z}E_0 \cos\vartheta_i\ .$$

analogamente (e considerando bene le direzioni)

$$\mathbf{E}'_0 \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{E}'_0 \times \hat{x} = -\hat{z}E'_{0y} = +\hat{z}E'_0 \cos\vartheta_r\ .$$

$$\mathbf{E}''_0 \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{E}''_0 \times \hat{x} = -\hat{z}E''_{0y} = -\hat{z}E''_0 \cos\vartheta_t\ .$$

Dalla (29) segue dunque

$$(E_0 - E'_0)\cos\vartheta_i - E''_0 \cos\vartheta_t = 0\ .$$

La condizione al contorno (31) si scrive in questo caso molto semplicemente perché $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$ ed entrambi nel piano $(x, y)$,

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \hat{z}\,kE\ ,$$

perciò

$$\frac{1}{\mu_1}(kE_0 + k'E'_0) - \frac{1}{\mu_2}k''E''_0 = 0\ ,$$

ovvero

$$\frac{1}{\mu_1}(E_0 + E'_0)\,n_1 - \frac{1}{\mu_2}E''_0\,n_2 = 0\ .$$

Il sistema di equazioni conduce alle soluzioni:

$$\left.\frac{E'_0}{E_0}\right|_{//} = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2}\,n_2\cos\vartheta_i - n_1\cos\vartheta_t}{\frac{\mu_1}{\mu_2}\,n_2\cos\vartheta_i + n_1\cos\vartheta_t} = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2}\,n_2^2\cos\vartheta_i - n_1\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\vartheta_i}}{\frac{\mu_1}{\mu_2}\,n_2^2\cos\vartheta_i + n_1\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\vartheta_i}}\ , \tag{45}$$

$$\left.\frac{E''_0}{E_0}\right|_{//} = \frac{2n_1\cos\vartheta_i}{\frac{\mu_1}{\mu_2}\,n_2\cos\vartheta_i + n_1\cos\vartheta_t} = \frac{2\,n_1 n_2\cos\vartheta_i}{\frac{\mu_1}{\mu_2}\,n_2^2\cos\vartheta_i + n_1\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\vartheta_i}}\ . \tag{46}$$

Ancora una volta valgono le relazioni

$$\lim_{\vartheta_i=0}\left.\frac{E'_0}{E_0}\right|_{//} = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2}n_2 - n_1}{\frac{\mu_1}{\mu_2}n_2 + n_1} = -\frac{n_1 - n_2}{n_2 + n_1}\ \text{ se } \mu_1 = \mu_2 = \mu_0\ ; \tag{47}$$

$$\lim_{\vartheta_i=0}\left.\frac{E''_0}{E_0}\right|_{//} = \frac{2\,n_1}{\frac{\mu_1}{\mu_2}n_2 + n_1} = \frac{2\,n_1}{n_2 + n_1}\ \text{ se } \mu_1 = \mu_2 = \mu_0\ ; \tag{48}$$

e le

$$\lim_{\vartheta_i\to\pi/2}\left.\frac{E'_0}{E_0}\right|_{//} \to -1\ ; \tag{49}$$

$$\lim_{\vartheta_i\to\pi/2}\left.\frac{E''_0}{E_0}\right|_{//} \to 0\ . \tag{50}$$

**Angolo di Brewster**

Si noti che dalle (45) con $\mu_1 = \mu_2$, sfruttando le relazioni trigonometriche

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \qquad \sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

per un angolo tale che

$$\tan\vartheta_{iB} = \frac{n_2}{n_1}\ , \tag{51}$$

$$\left.\frac{E_0'}{E_0}\right|_{//} = 0\ .$$

L'angolo di incidenza $\vartheta_{iB}$ che soddisfa la relazione (51), è detto angolo di Brewster, seguendo il nome del suo scopritore che lo individuò empiricamente nel 1812. Nel caso di un angolo di incidenza pari a $\vartheta_{iB}$, l'angolo tra il raggio trasmesso e quello riflesso vale $\pi/2$, ovvero $\vartheta_{iB} + \vartheta_t = \pi/2$. Infatti dalla legge di Snell $n_1 \sin\vartheta_i = n_2 \sin\vartheta_t$

$$n_1 \sin\vartheta_{iB} = n_2 \sin\vartheta_t = n_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_{iB}\right) = n_2 \cos\vartheta_{iB}\ ,$$

da cui la condizione di Brewster

$$\tan\vartheta_{iB} = \frac{n_2}{n_1}\ ,$$

necessaria all'annullamento della componente riflessa parallela al piano di incidenza. Nel caso della separazione aria vetro, $n_1 \approx 1$, $n_2 \approx 1.5$ e $\vartheta_{iB} = \arctan 1.5 = 56.3^{\circ}$; in questo caso l'angolo di trasmissione (rifratto) avrebbe un angolo di rifrazione $\vartheta_t = 33.7^{\circ}$.

Questa osservazione induce a pensare che, nel modello ad elettroni oscillanti, i dipoli atomici oscillanti in forza dell'onda incidente e che nella materia sono forzati dal campo elettrico $\mathbf{E}_t$ parallelo (per $\vartheta_i = \vartheta_{iB}$) al raggio riflesso, l'angolo di Brewster trovi una spiegazione microscopica semplice: il dipoli elettrici infatti non emettono radiazione lungo la loro direzione di oscillazione.

**Potere riflettente dei metalli**

Sia in condizioni di campo parallelo (//) che perpendicolare ($\perp$) al piano di incidenza, per angoli vicini a $\vartheta_i = 0$, l'intensità della radiazione riflessa assume la stessa espressione

$$\frac{I_r}{I_i} = \left|\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right|^2\ .$$

Se assumiamo ora (come nel caso dei metalli) che l'indice di rifrazione $n_2 = i n_I$ sia (praticamente) immaginario, si ha (supponiamo $n_1 \approx 1$, come nel caso dell'aria)

$$\frac{I_r}{I_i} = \left|\frac{1 - i n_I}{1 + i n_I}\right|^2 = 1\ !!\ .$$

È questo risultato che giustifica la grande capacità riflettente delle superfici metalliche (opportunamente trattate per renderle levigate ed omogenee).

La regola è generale, se un materiale è (a certe frequenze) un buon assorbitore (grande valore della parte immaginaria dell'indice di rifrazione) quelle frequenze non penetrano nel materiale e vengono riflesse (se la superficie è opportuna).

**Onda evanescente e riflessione totale**

Se $n_1 > n_2$, $\sin\vartheta_t = \sin\vartheta_i \cdot \frac{n_1}{n_2} > \sin\vartheta_i$, in particolare $\vartheta_t = \pi/2$ per

$$\sin\vartheta_i^\star = \frac{n_2}{n_1} \ ,$$

l'angolo di rifrazione raggiunge $\pi/2$; ($\vartheta_i^\star \approx 49^o$ per il passaggio aria acqua, dove $n_2 \approx 1.33$). Per angoli $\vartheta_i > \vartheta_i^\star$ accade il fenomeno della riflessione totale, il raggio luminoso viene interamente riflesso. In queste circostanze

$$\sin\vartheta_t = \sin\vartheta_i \cdot \frac{n_1}{n_2}$$

continua ad essere reale, mentre

$$\cos\vartheta_t = \sqrt{1-\sin^2\vartheta_t} = \sqrt{1-\sin^2\vartheta_i\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2} = i\sqrt{\sin^2\vartheta_i\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2-1}$$

è puramente immaginario dato che $\sin\vartheta_i > n_2/n_1$. Se si considera dunque il campo elettrico trasmesso

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t &= \mathbf{E''}_0\, e^{i(k''_x x + k''_y y - \omega t)} = \mathbf{E''}_0\, e^{i(k''\cos\vartheta_t x + k''\sin\vartheta_t y - \omega t)} = \\ &= \mathbf{E''}_0\, e^{-k''\left[\sqrt{\sin^2\vartheta_i\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2-1}\right]x}\, e^{i(k''\frac{n_1}{n_2}\sin\vartheta_i\, y-\omega t)} \ , \end{aligned}$$

si scopre che la sua ampiezza si attenua rapidamente lungo la direzione $x$, direzione di propagazione nel mezzo 2, e che la velocità di fase lungo $y$ risulta

$$v_{\text{fase}} = \frac{\omega}{k''_y} = \frac{\omega}{k''\frac{n_1}{n_2}\sin\vartheta_i} = \frac{\omega}{k\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\sin\vartheta_i} = v_{\text{fase, incidente}}\sqrt{\frac{n_2}{n_1}}\frac{1}{\sin\vartheta_i} \ .$$

(dove si è utilizzata la relazione (26) e indicato $v_{\text{fase, incidente}} = \omega/k$).
Se si calcola l'intensità trasmessa attraverso la superficie di separazione dei due mezzi, ovvero lungo la direzione $\hat{\mathbf{n}}$, si scopre che l'intensità si annulla una volta raggiunto il regime di riflessione totale. Infatti (essendo $\mathbf{E}_t = \mathbf{E''}_0 e^{i(\mathbf{k''}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ e $\mathbf{H}_t = \frac{1}{\mu_2}\mathbf{B}_t = \frac{\mathbf{k''}\times\mathbf{E}_t}{\mu_2\omega}$), l'intensità lungo $\hat{\mathbf{n}}$ diviene[2]:

$$I = \frac{1}{2}\left[\Re\left(\mathbf{E}_t\times\mathbf{H}_t^\star\right)\cdot\hat{\mathbf{n}}\right] = \frac{|\mathbf{E''}_0|^2}{2\,\omega\mu_2}\Re\left(\mathbf{k''}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right) \ ,$$

che si annulla quando $\Re\left(\mathbf{k''}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right) = k''\Re\left(\cos\vartheta_t\right)$ si annulla, cioè quando $\cos\vartheta_t$ è puramente immaginario, come nel caso presente.

[2] Si è usata, per semplicità, la relazione $\langle\Re\mathbf{A}\times\Re\mathbf{B}\rangle = \frac{1}{2}\Re\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}^\star\right)$, valida quando la dipendenza dal tempo di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ è del tipo $e^{i\omega t}$.