

## Equazioni di Maxwell

I campi elettrici e magnetici (nel vuoto) sono descritti dalle equazioni di Maxwell (in unità MKSA)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4)$$

La forza che agisce su di una carica (puntiforme) che si muove con velocità  $\mathbf{v}$  è data dalla forza di Lorentz<sup>1</sup>

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (5)$$

Si noti che tutte le quantità coinvolte (eccetto le costanti dovute all'uso delle unità di misura) sono dipendenti dallo spazio e dal tempo (esempio  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  etc..).

In presenza di materia, le stesse equazioni possono essere scritte

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{lib}} \quad (6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (8)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{lib}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (9)$$

dove

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (10)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) . \quad (11)$$

$$(12)$$

---

<sup>1</sup>si suppone che la presenza della carica  $q$  *di prova* non alteri apprezzabilmente i campi esterni  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$

Le precedenti equazioni possono essere semplificate nei casi in cui esista una relazione semplice tra i vettori Polarizzazione  $\mathbf{P}$  e Magnetizzazione  $\mathbf{M}$  ed il campo elettrico  $\mathbf{E}$  e campo  $\mathbf{H}$ , rispettivamente. Ad esempio, nel caso di materiali omogenei ed isotropi non ferromagnetici

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \approx \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi^e \mathbf{E} = \\ &= \epsilon_0 (1 + \chi^e) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}\end{aligned}\quad (13)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \approx \mu_0 (\mathbf{H} + \chi^m \mathbf{H}) = \\ &= \mu_0 (1 + \chi^m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} .\end{aligned}\quad (14)$$

Si noti che si è supposta una relazione lineare tra i vettori  $\mathbf{D}$  ed  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  ed  $\mathbf{H}$ , che sarà valida solo per deboli campi (quando gli effetti dipendenti da potenze più elevate dei campi inducenti negli sviluppi

$$\begin{aligned}P_\alpha(\mathbf{E}) &= P_\alpha(\mathbf{E} = 0) + \sum_\beta \left. \frac{\partial P_\alpha}{\partial E_\beta} \right|_{\mathbf{E}=0} E_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\beta\gamma} \left. \frac{\partial^2 P_\alpha}{\partial E_\beta \partial E_\gamma} \right|_{\mathbf{E}=0} E_\beta E_\gamma + \dots \\ M_\alpha(\mathbf{H}) &= M_\alpha(\mathbf{H} = 0) + \sum_\beta \left. \frac{\partial M_\alpha}{\partial H_\beta} \right|_{\mathbf{H}=0} H_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\beta\gamma} \left. \frac{\partial^2 M_\alpha}{\partial H_\beta \partial H_\gamma} \right|_{\mathbf{H}=0} H_\beta H_\gamma + \dots\end{aligned}$$

possono essere trascurati). Inoltre si noti che, pur supponendo di restringersi all'ordine più basso, cioè ad una relazione lineare, tale relazione potrebbe essere scritta attraverso un tensore di rango 2, includendo così il caso di mezzi non isotropi. La relazione tra le componenti è quindi scrivibile (per materiali non ferromagnetici, perciò con magnetizzazione residua nulla e non "elettretti", cioè con polarizzazione residua nulla)

$$\begin{aligned}P_\alpha / \epsilon_0 &= \sum_\beta \chi_{\alpha\beta}^e E_\beta = \chi_{\alpha\beta}^e E_\beta , \\ M_\alpha &= \sum_\beta \chi_{\alpha\beta}^m H_\beta = \chi_{\alpha\beta}^m H_\beta ,\end{aligned}$$

avendo utilizzato la convenzione di implicita somma su indici ripetuti.

### Elettrodinamica nel vuoto

Riprendiamo il caso delle equazioni di Maxwell nel vuoto. I campi elettrici e magnetici possono essere espressi in funzione di opportuni potenziali: scalare

( $\varphi$ ) e vettore ( $\mathbf{A}$ ) tali che<sup>2</sup>

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (15)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} . \quad (16)$$

È facile verificare che i potenziali così definiti non sono unicamente determinati. Potenziali che differiscono da questi in modo opportuno (vengano *trasformati* attraverso opportune trasformazioni dette di Gauge), producono gli stessi campi elettrici e magnetici. Così i potenziali ottenuti dai precedenti tramite l'aggiunta di gradiente e derivata temporale di una funzione scalare  $\chi$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla\chi , \\ \varphi' &= \varphi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \end{aligned} \quad (17)$$

godono della proprietà di essere potenziali degli stessi campi

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= -\nabla\varphi' - \frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} = \\ &= -\nabla\varphi + \nabla\frac{\partial\chi}{\partial t} - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\chi = \\ &= -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E} \\ \mathbf{B}' &= \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla\chi) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} . \end{aligned}$$

Ricordando che vale l'identità vettoriale

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{C}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{C}) - \nabla^2\mathbf{C} , \quad (18)$$

dalle equazioni di Maxwell si possono ricavare delle equazioni differenziali di secondo ordine per i potenziali. Si ha (da (1) e (4))

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left( -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\nabla^2\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{A} = \varrho/\epsilon_0 \quad (19)$$

---

<sup>2</sup>Dall'equazione di Maxwell  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$  si deduce, in virtù della (16) che :  
 $\nabla \times (\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}) = 0$ , quindi si potrà sempre scrivere  $(\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}) = -\nabla\varphi$  da cui la (15).

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{B} &= \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \\
&= \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) ; \quad (20)
\end{aligned}$$

ovvero sommando e sottraendo all'equazione (19) il termine  $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$  e rimaneggiando l'equazione (20)

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \varphi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] ; \\
\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{j} + \nabla \left[ \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] .
\end{aligned}$$

Queste sono equazioni differenziali accoppiate, ma possono essere fortemente semplificate se si sfrutta la libertà nella definizione dei potenziali. In particolare il rotore di  $\mathbf{A}$  è definito dalla (16), ma la sua divergenza può essere definita in modo arbitrario. Se la si fissa in modo che

$$\left[ \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] = 0 \quad (21)$$

le due equazioni differenziali possono essere disaccoppiate e risultano

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} ; \quad (22)$$

$$\nabla^2 \varphi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} ; \quad (23)$$

Osservazioni

- i) Le equazioni (22) (23), generalizzano, al caso dipendente dal tempo, le equazioni di Poisson note in statica

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{j} , \\
\nabla^2 \varphi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} ,
\end{aligned}$$

ed aventi soluzioni (per distribuzioni di cariche e correnti limitate nello spazio) le note espressioni

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{r}_1) &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int d^3 \mathbf{r}_2 \frac{\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_{12}|} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}_2) dV_2}{|\mathbf{r}_{12}|} ; \\
\mathbf{A}(\mathbf{r}_1) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 \mathbf{r}_2 \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_{12}|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_2) dV_2}{|\mathbf{r}_{12}|} . \quad (24)
\end{aligned}$$

- ii) Aver imposto alla divergenza del potenziale vettore  $\mathbf{A}$  la condizione (21), restringe l'arbitrarietà delle funzioni  $\chi$  nelle trasformazioni di gauge (17), che ora devono soddisfare alla

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla\chi) + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \varphi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \right) = 0 \quad (25)$$

ovvero, dato che deve valere  $\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0\epsilon_0 \partial\varphi/\partial t = 0$ , la classe delle funzioni  $\chi$  deve essere ristretta alla classe delle soluzioni dell'equazione

$$\nabla^2\chi - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0 . \quad (26)$$

- iii) L'operatore

$$\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

è ricorrente in tutte le equazioni rendendole simili tra loro.

- iv) Nele zone lontane dalle cariche e dalle sorgenti, dove

$$\begin{cases} \mathbf{j} = 0 , \\ e \\ \varrho = 0 , \end{cases} \quad (27)$$

le equazioni assumono una forma omogenea, cioè

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 ; \quad (28)$$

$$\nabla^2\varphi - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 ; \quad (29)$$

e si può dimostrare che **anche** il campo elettrico e magnetico obbediscono alla stessa equazione. Per la dimostrazione occorre restringersi alle equazioni di Maxwell nelle zone lontane dalle sorgenti dove valgono le (27). Si ha così

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (30)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad (31)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (32)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = +\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \quad (33)$$

che assumono una forma particolarmente simmetrica. Queste equazioni possono essere disaccoppiate calcolando il  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}$  e l'analogo  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{B}$  (si ricorda che vale la (18), otteniamo le equazioni

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 ; \quad (34)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 ; \quad (35)$$

ancora una volta la stessa forma... Si deve però notare che tra tutte le soluzioni delle **sei** indipendenti equazioni (34), (35), per  $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ , occorrerà scegliere quelle che obbediscono alle equazioni di Maxwell (30)-(33).

- vi) Da ultimo osserviamo che le equazioni di Maxwell sono state ricavate per deboli variazioni nel tempo delle correnti, occorrerà verificare che valgano anche per sorgenti e campi rapidamente variabili col tempo.

### Equazione delle onde

Occorrerà studiare l'equazione

$$\nabla^2 \eta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 ; \quad (36)$$

comune a tutte le equazioni trovate.  $v^2$  è un parametro reale e positivo (perché tale è la combinazione  $\mu_0 \epsilon_0$ ) dalle dimensioni di una velocità al quadrato. Restringiamoci (per semplicità) all'equazione unidimensionale

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta(x, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \eta(x, t) = 0 . \quad (37)$$

La precedente equazione ammette come soluzioni funzioni delle variabili  $\xi = x - vt$  e  $\lambda = x + vt$ , che sono combinazioni specifiche di  $x$  e  $t$ ,

$$\eta(x, t) = f(x - vt) \quad \text{ovvero} \quad \eta(x, t) = g(x + vt) . \quad (38)$$

Infatti è facile verificare che

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{d}{d\xi} = \frac{d}{d\lambda} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= -v \frac{d}{d\xi} = +v \frac{d}{d\lambda} \end{aligned} \quad (39)$$

da cui la dimostrazione che sia  $f(x - vt)$  che  $g(x + vt)$  sono soluzioni della (37), ovvero che la soluzione generale può essere scritta come combinazione lineare delle due

$$\eta(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) , \quad (40)$$

che rappresenta la combinazione di due onde: l'una ( $f(x - vt)$ ) viaggiante nel verso positivo dell'asse  $x$  e l'altra ( $g(x + vt)$ ) nel verso negativo delle  $x$ . Si noti che per  $t = 0$ ,  $\eta(x, t = 0) = f(x) + g(x)$

### Onde trasversali in una corda tesa

L'equazione (37) può descrivere il moto di una perturbazione (trasversale rispetto alla direzione del moto) su una corda omogenea e tesa. Si può dimostrare che in questo caso

$$V = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (41)$$

dove  $T$  è la forza di tensione della corda e  $\mu$  la sua massa per unità di lunghezza. Il lavoro di deformazione fatto dall'esterno per generare la perturbazione (ad esempio scuotendo un estremo di una corda molto lunga...) si traduce in energia cinetica e potenziale (in quanto la corda è deformata, anche se di poco...). L'elemento di corda deformato ha lunghezza

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \right] = dx \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2} \right]$$

e presenta quindi una deformazione rispetto allo stesso elemento a riposo

$$\begin{aligned} dl &= ds - dx = dx \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2} - 1 \right] = \\ &\approx dx \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 - 1 \right] = dx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 . \end{aligned}$$

Si è fatto uso dell'ipotesi di piccole deformazioni e quindi piccoli valori delle derivate  $d\eta/dx$ , ipotesi che alla base dell'equazione delle onde sulla corda. L'energia potenziale immagazzinata equivale al lavoro fatto dalle forze esterne, in questo caso la tensione della corda

$$dE_p = T dl \approx \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 dx .$$

Essendo l'energia cinetica del tratto  $dl$  di corda pari a

$$dE_c = \frac{1}{2} ds \mu \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 \approx \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 dx \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] \approx \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 dx ,$$

avendo trascurato ordini superiori nelle derivate. In conclusione l'energia per unità di lunghezza, della corda diviene

$$\frac{dE_c + dE_p}{dx} = \frac{dE}{dx} = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 . \quad (42)$$

Una caratteristica di grande importanza della propagazione per onde di una perturbazione è il fatto che esse trasportano energia ed impulso (da qui tante applicazioni nella trasmissione di informazioni a distanza) e **non** richiedono uno spostamento effettivo di materia.

se si considera un tratto infinitesimo di corda sottoposto alla perturbazione (che immaginiamo provenga da sinistra), dato che la corda subisce uno spostamento apprezzabile solo trasversalmente (asse  $y$ ), nel tempo  $dt$  la tensione della corda compie un lavoro

$$\delta L = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_y dy = F_y \frac{\partial \eta}{\partial t} dt \equiv P(x, t) dt ,$$

dove  $P(x, t)$  è la potenza. Essendo  $F_y = -T \sin \theta \approx -T \tan \theta = -T \frac{\partial \eta}{\partial x}$  per piccoli spostamenti, si ottiene

$$P(x, t) = -T \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial t} = v T \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2$$

dove si è utilizzata la relazione (39) per le onde progressive. In virtù dell'equazione delle onde (37), e della espressione per la velocità (41), la precedente formula della potenza può essere scritta in forma simmetrica

$$P(x, t) = v \left[ \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] \equiv v u(x, t) , \quad (43)$$

ricordando la formula per l'energia (42), relazione che è stat ricavata per onde progressive su una corda, ma che ha validità ben più generale.



C'è anche da aspettarsi che l'onda trasporti quantità di moto (o impulso). Si potrebbe dimostrare (noi discuteremo l'argomento nel caso delle onde elettromagnetiche) che esiste tra la *densità* di quantità di moto (in questo caso la quantità di moto per unità di lunghezza  $\Pi(x, t)$ ) e la potenza  $P(x, t)$  (o densità di energia  $u(x, t)$ ) la seguente relazione

$$\Pi(x, t) = \frac{1}{v^2} P(x, t) = \frac{1}{v} u(x, t) .$$