Modi normali

Una corda di lunghezza L è tesa tra i punti $x = 0$ e $x = L$.All'istante $t = 0$ essa ha una configurazione data da $f(x)$ con $0 < x < L$ ed è rilasciata con velocità nulla. Trovare lo spostamento della corda in ogni istante successivo.

L'equazione da risolvere è l'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t) = 0$$

con le condizioni $y(x,0) = f(x)$, $y_t(x,0) = \frac{\partial}{\partial t}y(x,t)\Big|_{t=0} = 0$, $|y(x,t)| < M$, e ove $0 < x < L$.

Poniamo $y = X(x)\,T(t) \rightarrow$

$$\frac{1}{X}\,\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{v^2\,T}\,\frac{d^2T}{dt^2} = -\kappa^2 \ ;$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \kappa^2 X = 0 \ , \qquad \frac{d^2T}{dt^2} + v^2\,\kappa^2 T = 0 \ .$$

Risolvendo

$$X = a_1 \cos\kappa x + b_1 \sin\kappa x \ , \qquad T = a_2 \cos 4\kappa v t + b_2 \sin\kappa v t$$

ovvero

$$y(x,t) = (a_1 \cos\kappa x + b_1 \sin\kappa x)\,(a_2 \cos\kappa v t + b_2 \sin\kappa v t) \ .$$

Quindi la soluzione (a variabili separabili) che soddisfa le condizioni al contorno $y(0,t) = 0$ può essere scritta

$$y(x,t) = \sin\kappa x \ [A \sin\kappa v t + B\cos\kappa v t] \ .$$

Dalla $y(L,t) = 0$ abbiamo (il fattore temporale non può annullarsi identicamente)

$$\sin\kappa L = 0 \ , \quad \text{cioè} \ \ \kappa L = m\pi \ \ \text{ovvero} \ \ \kappa = m\pi/L \ .$$

Dalla $y_t(x,0) = 0$ si ha invece $A\kappa v \, \sin\kappa x = 0$ ovvero $A = 0$. In conclusione la soluzione cercata è

$$y(x,t) = B \sin\frac{m\pi x}{L}\,\cos\frac{m\pi v t}{L} \ .$$

Per soddisfare la condizione $y(x,0) = f(x)$ occorrerà sovrapporre queste soluzioni.

$$y(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\frac{m\pi x}{L} \cos\frac{m\pi v t}{L} \quad ,$$

e quindi

$$y(x,0) = f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\frac{m\pi x}{L} \quad .$$

Per la teoria delle serie di Fourier

$$B_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\frac{m\pi x}{L}$$

ed in conclusione

$$y(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\frac{m\pi x}{L} \cos\frac{m\pi v t}{L} \quad ,$$

e si può verificare che è proprio la soluzione.
I termini della serie rappresentano i *modi normali di vibrazione.*

1. Risolvere
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t) = \frac{1}{16}\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t)$$
con le condizioni $y(0,t) = 0$, $y(2,t) = 0$, $y(x,0) = 6\sin\pi x - 3\sin 4\pi x$, $y_t(x,0) = \frac{\partial}{\partial t} y(x,t)\Big|_{t=0} = 0$, $|y(x,t)| < M$.

   Poniamo $y = X(x)\,T(t) \rightarrow$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{16T}\frac{d^2T}{dt^2} = -\lambda^2 \ ;$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \ , \qquad \frac{d^2T}{dt^2} + 16\lambda^2 T = 0 \ .$$

   Risolvendo

$$X = a_1 \cos\lambda x + b_1 \sin\lambda x \ , \qquad T = a_2 \cos 4\lambda t + b_2 \sin 4\lambda t$$

   ovvero

$$y(x,t) = (a_1 \cos\lambda x + b_1 \sin\lambda x)\,(a_2 \cos 4\lambda t + b_2 \sin 4\lambda t) \ .$$

Per trovare le costanti è più facile iniziare da quelle condizioni al contorno che contengono due zeri, da $y(x,t) = 0$

$$a_1\,(a_2 \cos 4\lambda t + b_2 \sin 4\lambda t) = 0 \ ,$$

ovvero $a_1 = 0$ da cui la soluzione si riduce a

$$y(x,t) = (b_1 \sin \lambda x)\,(a_2 \cos 4\lambda t + b_2 \sin 4\lambda t) \ ,$$

e derivando rispetto a t,

$$y_t(x,t) = (b_1 \sin \lambda x)\,(-4\lambda a_2 \sin 4\lambda t + 4\lambda b_2 \cos 4\lambda t) \ , \rightarrow \quad y_t(x,0) = (b_1 \sin \lambda x)\,(4\lambda b_2) = 0 \ ,$$

quindi $b_2 = 0$. La soluzione diviene ($B = b_1 a_2$)

$$y(x,t) = B \sin \lambda x \, \cos 4\lambda t \ .$$

Da $y(2,t) = 0$ troviamo

$$B \sin 2\lambda \cos 4\lambda t = 0$$

ovvero $2 \sin 2\lambda = 0$, cioè $2\lambda = m\pi$ o $\lambda = m\pi/2$ con $m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ Pertanto

$$y(x,t) = B \sin \frac{m\pi x}{2} \, \cos 2m\pi t$$

è una soluzione. Poiché questa soluzione è limitata $|y(x,t)|$ è automaticamente soddisfatta.

Per soddisfare l'ultima condizione $y(x,0) = 6 \sin \pi x - 3 \sin 4\pi x$, usiamo il principio di sovrapposizione

$$y(x,t) = B_1 \sin \frac{m_1 \pi x}{2} \, \cos 2m_1 \pi t + B_2 \sin \frac{m_2 \pi x}{2} \, \cos 2m_2 \pi t \ ,$$

quindi a $t = 0$

$$y(x,0) = B_1 \sin \frac{m_1 \pi x}{2} + B_2 \sin \frac{m_2 \pi x}{2} = 6 \sin \pi x - 3 \sin 4\pi x$$

che si riduce a $B_1 = 6$, $m_1 = 2$, $B_2 = -3$, $m_2 = 8$, quindi la soluzione richiesta è

$$y(x,t) = 6 \sin \pi x \, \cos 4\pi t - 3 \sin 4\pi x \, \cos 16\pi t \ .$$

L'interpretazione: una corda tesa deformata all'inizio con forma data e poi lasciata vibrare.

2. Una corda ha gli estremi fissi in $x = 0$ e $x = L$. Essa viene spostata ad una distanza $h \ll L$ **nel punto di mezzo** all'istante $t = 0$ e poi rilasciata. Formulare un problema che dia lo spostamento $y(x, t)$ di un punto generico x della corda all'istante t.

$$a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t)$$

con le condizioni $y(0, t) = 0$, $y(L, t) = 0$, $y_t(x, 0) = \frac{\partial}{\partial t} y(x,t)\Big|_{t=0} = 0$, $|y(x, t)| < M$.

$$y(x,0) = \begin{cases} 2hx/L & \text{per} \quad 0 \le x \le L/2 \\ 2h(L-x_)/L & \text{per} \quad L/2 \le x \le L \end{cases}$$

3. Una corda lunga due metri è tesa tra due punti fissi $x = 0$ e $x = 2$ m. Se lo spostamento della corda dall'asse è dato da $f(x) = 0.03x(2 - x)$ e se la velocità iniziale è nulla, trovare lo spostamento ad ogni istante successivo.

$$y(x,t) = \frac{0.96}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2} \cos \frac{(2n-1)\pi ct}{2}$$

4. Una corda **infinita** viene spostata inizialmente di $y(x, 0) = f(x)$ e poi rilasciata. Determinare il suo spostamento in ogni istante successivo t.

il problema è

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t)$$

con le condizioni $y(x, 0) = f(x)$, $y_t(x, 0) = \frac{\partial}{\partial t} y(x,t)\Big|_{t=0} = 0$, $|y(x, t)| < M$, e ove $-\infty < x < +\infty$. La soluzione che soddisfa la condizione sulla derivata ottenuta per separazioni di variabili come nel problema ... è

$$y(x,t) = (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) \cos \lambda a t \quad .$$

Supponendo che A e B siano funzioni di λ ed integrando tra $\lambda = 0$ e $\lambda \to \infty$ giungiamo alla possibile soluzione

$$y(x,t) = \int_0^{\infty} d\lambda \; [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] \cos \lambda a t \quad .$$

Ponendo $t = 0$ dalla condizione iniziale si ha

$$y(x,0) = f(x) = \int_0^\infty d\lambda \; [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]$$

Segue dalle (1) e (2) dell'appendice, che

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\cos\lambda v\, dv \;, \qquad B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\sin\lambda v\, dv \;.$$

Sostituendo nella soluzione si ha

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\; [\cos\lambda x\cos\lambda v + \sin\lambda x\sin\lambda v]\cos\lambda at\, dv\, d\lambda = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\; \cos\lambda(x-v)\cos\lambda at\, dv\, d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\; [\cos\lambda(x+at-v)\cos\lambda(x-at-v)]\; dv\, d\lambda \;, \end{aligned}$$

dove si è usata l'identità trigonometrica

$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}\,[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

con $A = \lambda(x-v)$ e $B = \lambda at$.

Dal teorema integrale di Fourier nella forma (3) sappiamo che

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda=0}^\infty \int_{v=-\infty}^{+\infty} f(v)\cos\lambda(x-v)\, dv\, d\lambda$$

e sostituendo x con $x+at$ e $x-at$, si può scrivere

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\,[f(x+at) + f(x-at)]$$

che è la soluzione richiesta. Così la soluzione viaggiante si è ottenuta dallo sviluppo in modi normali.

5.

Appendice

L'integrale di Fourier

Supponiamo che $f(x)$ goda delle seguenti proprietà:

1. $f(x)$ ed $f'(x)$ siano generalmente continue in ogni intervallo finito,
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ converga, cioè $f(x)$ sia assolutamente integrabile in $(-\infty, +\infty)$.

Allora il teorema di Fourier afferma che

$$f(x) = \int_0^\infty \{A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x\}\, d\alpha \qquad (1)$$

ove

$$\left.\begin{array}{l} A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\alpha x\, dx \\ \\ B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\alpha x\, dx \end{array}\right\} . \qquad (2)$$

Il risultato (1) vale se x è un punto di continuità per $f(x)$. Se x è un punto di discontinuità dobbiamo sostituire $f(x)$ con $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ come nel caso della serie di Fourier. Si noti che le condizioni precedenti sono sufficienti ma non necessarie.

La somiglianxa delle (1), (2) con i corrispondenti risultati per le serie di Fourier è evidente. Il secondo membro della (1) è talvolta chiamato sviluppo integrale di Fourier di $f(x)$.

Forme equivalenti del teorema integrale di Fourier

Si può scrivere il teorema integrale di Fourier anche nelle forme:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{\alpha=0}^\infty \int_{u=-\infty}^{+\infty} f(u)\cos\alpha(x-u)\, du\, d\alpha \ , \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{i\alpha(x-u)}\, du\, d\alpha \ , \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{i\alpha x}\, d\alpha \int_{u=-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-i\alpha u}\, du \ . \end{aligned} \qquad (3)$$