

Il dipolo irraggiante

Il dipolo irraggiante è un esempio di soluzione delle equazioni dei potenziali ritardati particolarmente utile in pratica. Le equazioni (nel vuoto)

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{j} \\ \nabla^2 \phi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0},\end{aligned}\quad (1)$$

ammettono come soluzione generale per sorgenti localizzate

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}_1, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV_2 \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_2, t - r_{12}/c)}{r_{12}} \\ \phi(\mathbf{r}_1, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV_2 \frac{\rho(\mathbf{r}_2, t - r_{12}/c)}{r_{12}}.\end{aligned}\quad (2)$$

Per moti delle cariche con velocità molto più piccole della velocità della luce possiamo sostituire i ritardi con l'espressione più semplice $t - r_{12}/c \rightarrow t - r_1/c$, inoltre nelle zone lontane in cui $r_2 \ll r_1 = r$ gli integrali si semplificano in

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int dV_2 \mathbf{j}(\mathbf{r}_2, t - r/c) \\ \phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int dV_2 \rho(\mathbf{r}_2, t - r/c).\end{aligned}\quad (3)$$

Assumiamo ora che il tipo di distribuzione di carica e di corrente sia dovuto al moto di una distribuzione a carica totale nulla e con momento di dipolo variabile nel tempo e tale da produrre quindi una corrente (sia $t' = t - r/c$)

$$\begin{aligned}\int \mathbf{j}(\mathbf{r}_2, t') dV_2 &= \int \rho(\mathbf{r}_2, t') \mathbf{v}_2(t') dV_2 = \\ &= \int \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial t'} \rho(\mathbf{r}_2, t') dV_2 = \\ &= \frac{d}{dt'} \int \rho(\mathbf{r}_2, t') \mathbf{r}_2(t') dV_2 = \\ &= \dot{\mathbf{p}}|_{t'=t-r/c}.\end{aligned}\quad (4)$$

In conclusione

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int dV_2 \mathbf{j}(\mathbf{r}_2, t - r/c) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{p}}|_{t'=t-r/c}}{r}.\quad (5)$$

Per determinare il campo magnetico prodotto occorre calcolare $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, ricordando che $\mathbf{p} = \hat{z} p$ e quindi $\mathbf{A} = \hat{z} A_z$, mentre $A_x = A_y = 0$:

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = + \frac{\partial A_z}{\partial y} = - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{y}{r} \left[\frac{\dot{p}|_{t'=t-r/c}}{r^2} + \frac{\ddot{p}|_{t'=t-r/c}}{cr} \right] \\ B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = - \frac{\partial A_z}{\partial x} = - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{x}{r} \left[\frac{\dot{p}|_{t'=t-r/c}}{r^2} + \frac{\ddot{p}|_{t'=t-r/c}}{cr} \right] \\ B_z &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

ed in notazione compatta

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\left[\dot{\mathbf{p}} + \frac{r}{c} \ddot{\mathbf{p}} \right]_{t'=t-r/c} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (7)$$

Nel caso in cui si possano trascurare gli effetti dei ritardi ($r/c \rightarrow 0$), il campo magnetico si semplifica a quello noto dovuto ad un dipolo elettrico variabile nel tempo¹ ed il campo nelle prossimità del dipolo non risente degli effetti di ritardo:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{p}}|_{t'=t} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (8)$$

Il potenziale $\varphi(\mathbf{r}, t)$ può essere ricavato dalla condizione di Lorentz $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -c^2 \nabla \cdot \mathbf{A} = -c^2 \frac{\partial A_z}{\partial z} = -c^2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\dot{p}|_{t'=t-r/c}}{r} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r} \frac{\left[\dot{p} + \frac{r}{c} \ddot{p} \right]_{t'=t-r/c}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left[\dot{\mathbf{p}} + \frac{r}{c} \ddot{\mathbf{p}} \right]_{t'=t-r/c} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, \end{aligned} \quad (9)$$

ovvero

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left[\mathbf{p} + \frac{r}{c} \dot{\mathbf{p}} \right]_{t'=t-r/c} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, \quad (10)$$

che si riduce al potenziale di dipolo noto trascurando i ritardi, ovvero nelle zone vicine al dipolo ($r/c \rightarrow 0$)

$$\varphi(\mathbf{r}, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}|_{t'=t} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (11)$$

¹Per un elemento di corrente $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} I \Delta \mathbf{l} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \dot{\mathbf{p}} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}$, dato che $I \Delta \mathbf{l} = \frac{d}{dt} q \Delta \mathbf{l} = \dot{\mathbf{p}}$

Il campo elettrico deve essere calcolato dai potenziali

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left[-\mathbf{p}^* + 3\frac{(\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{r})}{r^2} \mathbf{r} + \frac{1}{c^2} (\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{r} \right]_{t'=t-r/c}, \quad (12)\end{aligned}$$

dove

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{p} + \frac{r}{c} \dot{\mathbf{p}}.$$

Ancora una volta, nelle zone in cui i ritardi possono essere trascurati, il campo si riduce a quello di un dipolo elettrico statico, ed il tempo è un puro parametro

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left[-\mathbf{p} + 3\frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^2} \mathbf{r} \right]_{t'=t}. \quad (13)$$

Nelle zone molto lontane dalle sorgenti (la cosiddetta zona delle onde) le espressioni per i campo elettrici e magnetici si semplificano notevolmente ed i termini che dipendono dall'inverso della distanza dominano, si ottiene

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{(\ddot{\mathbf{p}}|_{t'=t-r/c} \times \hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}}}{r}, \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^3} \frac{\ddot{\mathbf{p}}|_{t'=t-r/c} \times \hat{\mathbf{r}}}{r}.\end{aligned} \quad (14)$$

Queste soluzioni hanno le notevoli proprietà

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= |\mathbf{E}| \hat{\theta}, \\ \mathbf{B} &= |\mathbf{B}| \hat{\phi}, \\ |\mathbf{E}| &= c|\mathbf{B}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{p}|_{t'=t-r/c}}{r} \sin\theta,\end{aligned} \quad (15)$$

cioè: il campo elettrico e magnetico sono perpendicolari tra di loro e perpendicolari alla direzione di propagazione ($\hat{\mathbf{r}}$) ed il modulo del campo elettrico è c -volte quello del campo magnetico, cioè obbediscono alle proprietà delle onde piane nel vuoto.

potenza irraggiata

La potenza irraggiata nella zona delle onde è valutabile tramite il vettore di Poynting

$$\langle \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}} \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{r}} \rangle = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \right]^2 \frac{1}{c} \left\langle \left[\frac{\ddot{\mathbf{p}}|_{t'=t-r/c}}{r} \sin \theta \right]^2 \right\rangle \quad (16)$$

e la potenza irraggiata su tutto l'angolo solido risulta

$$\begin{aligned} \int \langle \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}} \rangle da &= \epsilon_0 c^2 \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \right]^2 \frac{1}{c} \langle \ddot{\mathbf{p}}|_{t'=t-r/c}^2 \rangle \int \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta da = \\ &= \epsilon_0 c^2 \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \right]^2 \frac{1}{c} \langle \ddot{\mathbf{p}}|_{t'=t-r/c}^2 \rangle \int \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \\ &= \epsilon_0 c^2 \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \right]^2 \frac{1}{c} \langle \ddot{\mathbf{p}}|_{t'=t-r/c}^2 \rangle \frac{8\pi}{3} = \\ &= \frac{2}{3} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{1}{c^3} \langle \ddot{\mathbf{p}}|_{t'=t-r/c}^2 \rangle . \end{aligned} \quad (17)$$