L'effetto Doppler

G. Garberoglio
Dipartimento di Fisica, Università degli Studi di Trento

Aprile 2003

Indice

Non esprimerti mai più chiaramente dei tuoi pensieri.
Niels Bohr.

1 Trasformazioni di Lorentz

In queste note useremo spesso due sistemi di riferimento, K e K' in moto relativo uniforme. In entrambi i sistemi di riferimento verranno usate coordinate cartesiane, ed il moto relativo è tale per cui l'origine del sistema K' si *allontana* dall'origine sistema K con velocità v diretta lungo l'asse x.

Le quantità misurate nel sitema K' verranno contrassegnate da un "apostrofo".

Le coordinate di un evento, e, quindi, le componenti controvarianti dei quadrivettori, si trasformano secondo la legge

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma\,(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma\,(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{1}$$

dove, come al solito, $\beta = v/c$ e $\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$

2 Cos'è un'onda?

Un'onda è una perturbazione di qualche cosa, che si propaga con una certa velocità: un'onda è quindi necessariamente un "campo", ovvero una quantità definita in ogni punto dello spazio e del tempo. Ad esempio nel caso di un'onda sonora il campo è la densità dell'aria, nel caso di un'onda marina il campo è l'altezza della superficie del mare, nel caso di un'onda elettromagnetica ogni componente del campo elettrico e magnetico sono i campi che si propagano.

A noi interessano soprattutto onde "lineari", che sono soluzioni dell'equazione

$$\nabla^2 f - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \tag{2}$$

e che, in generale, sono tutte le funzioni la cui dipendenza dalle coordinate spaziali e temporali è nella forma $(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)$, che si chiama di solito *fase* dell'onda. È facile verificare per sostituzione nell'equazione, che $f(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)$ è una soluzione se è verificata la condizione (detta *legge di dispersione*)

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = \frac{\omega^2}{V^2}$$

In altre parole il vettore d'onda $\mathbf{k}$ e la frequenza ω sono sufficienti a descrivere la distribuzione spaziale dell'onda in un certo istante e la sua evoluzione successiva (nota che sia la funzione f).

Se abbiamo una soluzione possiamo sempre ruotare il nostro sistema di coordinate in modo che il vettore $\mathbf{k}$ sia diretto lungo l'asse x. In questo caso la soluzione è della forma $f(kx - \omega t) = F(x - Vt)$, dove la funzione F è definita in modo che $F(x) = f(kx)$, e rappresenta, ovviamente, la funzione che descrive la distribuzione spaziale del campo al tempo $t = 0$.

All'istante $t = T$ la configurazione del campo è descritto da una funzione $G(x) = F(x - Vt)$, che corrisponde a traslare F lungo la direzione *positiva* dell'asse x di una quantità $\Delta x = Vt$. La configurazione spaziale presente all'istante $t = 0$ si è dunque propagata senza cambiare forma lungo la direzione positiva dell'asse x per una distanza pari a Δx.

Tra le varie soluzione dell'equazione (2) a noi interessano quelle per cui il campo oscilla sinusoidalmente (le *onde piane*), ovvero

$$f = f_0 \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t) \tag{3}$$

In questo caso i parametri $\mathbf{k}$ e ω hanno un significato fisico diretto. Infatti se consideriamo l'oscillazione in un certo punto dello spazio, il campo oscilla in maniera sinusoidale secondo l'equazione $f(t) = f_0 \cos(\phi - \omega t)$, dove sia $\phi = \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}$. Il periodo T di questa oscillazione è evidentemente dato dalla risoluzione di

$$\phi - \omega(t + T) = \phi - \omega t + 2\pi$$

ovvero $T = 2\pi/\omega$. Analogamente si vede che, ad un certo istante fissato, la distribuzione spaziale del campo è ancora un'oscillazione la cui lunghezza d'onda λ è legata al modulo k del vettore $\mathbf{k}$ dalla relazione $\lambda = 2\pi/k$.

3 L'effetto Doppler, trattazione diretta

Quello che ci interessa ora è quindi di valutare, nel caso di un'onda elettromagnetica che si propaga nello spazio vuoto ($V = c$), quali siano i valori dei parametri ω' e $\mathbf{k}'$ che descrivono l'onda nel sistema di riferimento K'.

Il modo più diretto per trovare la relazione tra frequenza/vettore d'onda nel sistema K' e frequenza/vettore d'onda nel sistema K è quello di rendersi conto che la fase dell'onda è una quantità necessariamente invariante da un sistema di riferimento ad un altro.

Supponiamo infatti di avere, in un certo punto dello spazio, un rivelatore che misuri quanti massimi sono passati per quel punto tra due istanti di tempo. Questo è evidentemente proporzionale alla parte intera del rapporto tra la differenza del valore della fase in due istanti e 2π: supponiamo che nel riferimento K valga N. La cosa importante da notare è che questa quantità è un *numero intero*, e che quindi non può variare cambiando il sistema di riferimento.

Infatti la legge di trasformazione tra un sistema di riferimento e un altro è una legge che dipende in maniera *continua* da un parametro (la velocità relativa tra i due sistemi di riferimento).

Denotiamo con $N'(v)$ il numero di massimi misurati in K': dal momento che il questo numero è evidentemente una quantità intera *in ogni sistema di riferimento* e la trasformazione è continua bisogna avere che, nel sistema K' il numero di massimi è lo stesso che viene misurato nel sistema K, ovvero $N'(v) = N$ dal momento che $N'(v)$ è una funzione a valori negli interi, e l'unico modo per cui sia continua al variare di v è che sia *costante*.

Notiamo, infine, che gli argomenti che stiamo usando si basano sul fatto che la fase deve essere invariante, e sono pertanto validi *per qualsiasi tipo di onda*, e non solo per le onde elettromagnetiche (che sono, comunque, l'unico caso che tratteremo in queste note).

3.1 Se la fase è invariante, allora...

Abbiamo visto che la quantità $\varphi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$ deve essere un'invariante. Dal momento che le coordinate di un evento $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$ sono un quadrivettore è necessario che $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$ sia anch'esso un quadrivettore: solo in questo modo è infatti possibile che la quantità $\varphi = k_\mu x^\mu$ sia un invariante (in quanto prodotto scalare 4-dimensionale tra due 4-vettori).

Questo permette di scrivere immediatamente la legge di trasformazione per i parametri dell'onda. Nel sistema K' la lunghezza d'onda $\lambda' = 2\pi/k'$ ed il periodo $T' = 2\pi/\omega'$ dell'onda si ricavano dalla legge di trasformazione di cui godono le quantità $(\omega/c, \mathbf{k})$ in quanto componenti di un 4-vettore:

$$\begin{aligned} \omega'/c &= \gamma(\omega/c - \beta k_x) \\ k'_x &= \gamma(k_x - \beta\omega/c) \\ k'_y &= k_y \\ k'_z &= k_z \end{aligned} \tag{4}$$

In accordo con i "postulati" della relatività è necessario che $(\omega'/c, \mathbf{k}')$ descrivano anch'essi un'onda che si propaga con la velocità della luce. In effetti si ha che la velocità dell'onda nel sistema K' è data da

$$\begin{aligned} c' &= \frac{\omega'}{k'} = \frac{\omega'}{\sqrt{k'^2_x + k'^2_y + k'^2_z}} \\ &= \frac{\gamma(\omega - \beta c k_x)}{\sqrt{\gamma^2(k_x - \beta\omega/c)^2 + k_y^2 + k_z^2}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(\omega - \beta c k_x)}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - 2k_x\beta\frac{\omega}{c} - \beta^2 k_x^2}} \\
&= c\frac{(\omega - \beta c k_x)}{(\omega - \beta c k_x)} = c
\end{aligned}
$$

come volevasi dimostrare.

È utile esprimere le relazioni (4) nel caso particolare in cui il vettore $\mathbf{k}$ sia diretto lungo l'asse x di modulo k ($k_x = k, k_y = k_z = 0$). Utilizzando la relazione $\omega/c = k$ si ottiene

$$
\begin{aligned}
\omega' &= \omega\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \\
k' &= k\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}
\end{aligned}
$$

Notiamo che nel riferimento K' (che si "allontana" dall'onda) la frequenza diminuisce, come ci si può aspettare.

3.2 Questi discorsi non mi convincono ancora!

Da un punto di vista più formale è effettivamente possibile dimostrare la validità dell'equazione (4) in maniera diretta, a partire solamente dal fatto che $(ct, \mathbf{x})$ è un 4-vettore e dell'invarianza della fase. Quest'ultima impone che (scegliendo $\mathbf{k}$ diretto lungo l'asse x, il caso generale è lasciato come esercizio)

$$\omega t - kx = \omega' t' - k' x'$$

Utilizzando la relazione inversa dell'eq. (1) per esprimere (ct, x) in funzione di (ct', x') e sostituendo nell'equazione precedente si ottiene

$$\omega\gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) - k\gamma(x' + vt') = \omega' t' - k' x'$$

da cui il primo membro può essere scritto (raccogliendo x' e t' a fattore)

$$t'\gamma(\omega - kv) - x'\gamma\left(k - \frac{v}{c^2}\omega\right) = t'\omega' - x'k'$$

Dal momento che questa uguaglianza deve valere *per ogni* valore di t' e x' si ottiene subito

$$
\begin{aligned}
\omega' &= \gamma(\omega - vk) \\
k' &= \gamma\left(k - \frac{v}{c^2}\omega\right)
\end{aligned}
$$

che coincidono con le prime due equazioni (4)

4 (cT, λ) non è un quadrivettore!

È un quadrimpostore. Nonostante l'apparenza ed il fatto che il suo "4-modulo" sia invariante (infatti $c^2T^2 - \lambda^2 = 0$ in ogni sistema di riferimento) il periodo e la lunghezza d'onda non si trasformerebbero nella maniera giusta (che è quella dimostrata sopra). Infatti se (cT, λ) fossero le componenti di un quadrivettore dovrebbe succedere (nel caso in cui l'onda si propaghi lungo l'asse x) che la sua "parte temporale" (ovvero il periodo) nel sistema K' sia

$$T' = \gamma(T - \beta\lambda/c) = \gamma T(1-\beta) = T\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \qquad \text{(SBAGLIATA!)}$$

da cui si dedurrebbe l'equazione

$$\omega' = \omega\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \qquad \text{(SBAGLIATA!)}$$

che è esattamente l'opposto del risultato giusto.

4.1 Si, ma se *voglio* usare λ e T?

È sicuramente possibile ricavare le formule dell'effetto Doppler senza passare per l'invarianza di fase ed utilizzando solamente i concetti di periodo e di lunghezza d'onda, oltre che le care e vecchie trasformazioni di Lorentz. In questo caso però l'analisi è leggermente più complicata in quanto bisogna stare attenti (come *sempre* quando si risolvono problemi di cinematica relativistica) alla relatività della simultaneità.

Dal momento che è comunque un calcolo istruttivo, vale la pena affrontarlo.

4.1.1 Trasformazione della lunghezza d'onda

Bisogna innanzittutto avere una definizione di lunghezza d'onda: è abbastanza evidente che la lunghezza d'onda è la distanza fra due massimi successivi e *simultanei* dell'onda. Per tradurre questa affermazione in matematichese occorre quindi descrivere la posizione, al variare del tempo, di due massimi dell'onda (dal momento un'onda è la una propagazione di una perturbazione, la posizione dei massimi varia nel tempo). Supponiamo che un massimo (evento A), passi all'istante $t = 0$ nell'origine del sistema di coordinate. All'istante t_A la sua posizione è evidentemente $x_A = ct_A$, quindi

$$A: \ (t_A, ct_A)$$

il massimo successivo è quello che, all'istante zero, è situato a distanza λ dall'origine, quindi

$$B: \ (t_B, ct_B + \lambda)$$

Notiamo che la distanza tra le posizioni dei massimi *a tempi uguali nel sitema* K (ovvero quando $t_A = t_B$) è effettivamente λ.

Nel sistema K' la posizione del primo massimo (parametrizzata dal tempo t_A) è

$$\begin{aligned} t'_A &= \gamma(t_A - \frac{v}{c^2}x_A) = \gamma(t_A - \beta t_A) = \gamma(1-\beta)t_A \\ x'_A &= \gamma(x_A - vt_A) = \gamma(ct_A - vt_A) = \gamma(1-\beta)ct_A \end{aligned}$$

mentre invece la posizione del massimo successivo (parametrizzata dal tempo t_B) è

$$\begin{aligned} t'_B &= \gamma(t_B - \frac{v}{c^2}x_B) = \gamma(t_B - \beta t_B - \beta\lambda) = \gamma(1-\beta)t_B - \gamma\beta\lambda \\ x'_B &= \gamma(x_B - vt_B) = \gamma(ct_B + \lambda - vt_B) = \gamma(1-\beta)ct_B + \gamma\lambda \end{aligned}$$

A questo punto per calcolare la lunghezza d'onda λ' dobbiamo prendere la posizione dei due massimi *contemporaneamente* nel sistema K' (e quindi imporre $t'_A = t'_B$). Il richiedere questa contemporaneità vuol dire che stiamo considerando due eventi che *non* sono simultanei nel sitema di riferimento K. La richiesta di simultaneità in K' impone che

$$t'_A = t'_B \Longrightarrow t_A = t_B - \frac{\beta}{1-\beta}\frac{\lambda}{c}$$

da cui si vede che $t_A \neq t_B$. A questo punto la lunghezza d'onda nel sistema K' è la differenza fra le posizioni dei massimi misurate contemporaneamente in K'

$$\lambda' = (x'_B - x'_A)|_{t'_A = t'_B}$$

$$
\begin{aligned}
&= \gamma(1-\beta)c(t_B - t_A) + \gamma\lambda \\
&= \gamma(1-\beta)c\frac{\beta}{1-\beta}\frac{\lambda}{c} + \gamma\lambda \\
&= \lambda\gamma(1+\beta) = \lambda\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}
\end{aligned}
$$

che si verifica facilmente essere la stessa formula che si ricava dalla trasformazione del 4-vettore d'onda.

4.1.2 Trasformazione del periodo

Per calcolare la legge di trasformazione del periodo, occorre averne una definizione precisa e ragionare in maniera analoga a quanto visto sopra. È chiaro che il periodo di un onda è l'intervallo di tempo che deve trascorrere affinché due massimi consecutivi passino *nello stesso punto dello spazio.* Se consideriamo gli stessi due massimi della sezione precedente occorre ora parametrizzare le loro coordinate in funzione della posizione. Il 4-vettore che corrisponde a dove si trova il primo massimo, in funzione della distanza dall'origine è

$$
A: \left(\frac{x_A}{c}, x_A\right)
$$

(infatti passa nel punto x_A al tempo $t = x_A/c$ se è nell'origine al tempo $t = 0$). Il massimo successivo arriva nell'origine all'istante $t = T$, quindi le sue coordinate spazio-temporali sono

$$
B: \left(T + \frac{x_B}{c}, x_B\right)
$$

(e infatti passa per l'origine – $x_B = 0$ – al tempo T).

Il periodo dell'onda nel sistema K si ottiene quindi considerando la differenza fra le componenti temporali dei due 4-vettori valutati nello stesso punto (cioè quando $x_A = x_B$).

Nel sistema di riferimento K' le coordinate di A e B sono

$$
\begin{aligned}
t'_A &= \gamma\left(\frac{x_A}{c} - \frac{v}{c^2}x_A\right) = \frac{\gamma}{c}(1-\beta)x_A \\
x'_A &= \gamma\left(x_A - \frac{v}{c}x_A\right) = \gamma(1-\beta)x_A \\
t'_B &= \gamma\left(T + \frac{x_B}{c} - \frac{v}{c^2}x_B\right) = \frac{\gamma}{c}(1-\beta)x_B + \gamma T \\
x'_B &= \gamma\left(x_B - \frac{v}{c}x_B - vT\right) = \gamma(1-\beta)x_B - \gamma vT
\end{aligned}
$$

ed il periodo è definito come la differenza tra i tempi con cui i massimi arrivano *nello stesso punto*

$$
T' = (t'_B - t'_A)|_{x'_A = x'_B}
$$

ma gli eventi A e B accadono nello stesso punto se

$$
x'_A = x'_B \Longrightarrow \gamma(1-\beta)x_A = \gamma(1-\beta)x_B - \gamma vT
$$

ovvero

$$
x_B - x_A = \frac{v}{1-\beta}T
$$

da cui si vede che eventi che avengono *nello stesso punto* del sistema K' corrispondono ad eventi spazialmente separati nel sistema K. A questo punto il periodo nel sistema K' si calcola facilmente come

$$
T' = (t'_B - t'_A)|_{x'_A = x'_B}
$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\gamma}{c}x_B(1-\beta)+\gamma T-\frac{\gamma}{c}x_A(1-\beta)\\
&= \gamma T+\frac{\gamma}{c}(1-\beta)(x_B-x_A)\\
&= \gamma T+\frac{\gamma}{c}(1-\beta)\frac{v}{1-\beta}T\\
&= T\gamma(1+\beta)=T\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}
\end{aligned}$$

che è in perfetto accordo con quanto ricavato (per la frequenza) trasformando il 4-vettore $(\omega/c, k)$.

5 E le onde nei mezzi?

In un mezzo a riposo con indice di rifrazione $n = \sqrt{\varepsilon} = n_R + in_I$ si possono propagare onde elettromagnetiche il cui campo elettrico varia secondo la legge

$$\mathbf{E}(x,t) = \mathbf{E}_0\ e^{-ik_I x}\ \cos(k_R x - \omega t)$$

dove $k_I = \omega n_I/c$ e $k_R = \omega n_R/c$. Abbiamo supposto, per semplicità, che l'onda si propaghi lungo la direzione positiva dell'asse x. Notiamo che quest'onda si propaga con una velocità $v_{ph} = c/n_R$.

A questa perturbazione è associata una fase $\varphi = (k_R x - \omega t)$, che, per ragionamenti analoghi a quanto presentato nel paragrafo 3, deve essere un invariante di Lorentz. Quindi anche alle onde nei mezzi è possibile associare un 4-vettore d'onda nella forma

$$\kappa = \left(\frac{\omega}{c}, n_R\frac{\omega}{c}\right)$$

Se supponiamo che il mezzo materiale considerato sia a riposo nel sistema di riferimento K, l'espressione per il 4-vettore d'onda nel sistema K' (in cui il mezzo si muove) si ottiene per applicazione diretta delle equazioni 1, che forniscono

$$\kappa' = \gamma\frac{\omega}{c}(1-\beta n_R, n_R-\beta)$$

da cui si deduce che la frequenza ed il vettore d'onda nel sistema K' sono

$$\begin{aligned}
\omega' &= \omega\gamma(1-\beta n_R)\\
k' &= \gamma\tfrac{\omega}{c}(n_R-\beta)
\end{aligned} \tag{5}$$

e quindi la velocità di fase dell'onda nel sistema K' è

$$v'_{ph} = \frac{\omega'}{k'} = c\frac{1-\beta n_R}{n_R-\beta} \equiv \frac{c}{n'_R} \tag{6}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo definito l'indice di rifrazione nel sistema K' come

$$n'_R = \frac{n_R-\beta}{1-\beta n_R} \tag{7}$$

Notiamo che questo risultato è in accordo (come deve) con la legge di composizione relativistica delle velocità. Infatti la velocità di fase nel sistema K' si scrive, in funzione della velocità di fase nel sistema K come

$$v'_{ph} = \frac{v_{ph}-v}{1-\frac{v_{ph}v}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n_R}(1-\beta n_R)}{\frac{1}{n_R}(n_R-\beta)} = c\frac{1-\beta n_R}{n_R-\beta}$$

Un altro metodo per ricavare l'indice di rifrazione per un materiale in movimento è stato proposto come esercizio d'esame, il cui testo è riportato in Appendice B *.

*Si noti che nell'esercizio proposto il materiale è a riposo nel sistema K'. Si deve quindi ottenere come risultato quello discusso qui, con la sostituzione $\beta \to -\beta$.

Lo studente particolarmente attento avrà notato che nell'equazione (7) l'indice di rifrazione nel sistema K' diventa *negativo* per $\beta > 1/n_R$, e questo può sembrare ben strano. Infatti in questo sistema è presente un'onda elettromagnetica che si propaga nella direzione *negativa* dell'asse x (infatti si ha $v'_{ph} < 0$), cosa naturale, dal momento che si sta osservando l'onda in un sistema di riferimento che si muove più velocemente di quanto lei si muova nel mezzo dielettrico.

La "stranezza" deriva dal fatto che si può immaginare che, nel riferimento K, ci sia un mezzo dielettrico, delimitato dai piani $x = 0$ e $x = L$, su cui incide un'onda proveniente dalla regione $x < 0$ che si propaga lungo la direzione *positiva* dell'asse x. Dopo aver attraversato il materiale l'onda riemerge dalla superficie $x = L$. Passando al sistema K' l'onda incidente cambia frequenza, ma non direzione di propagazione (che rimane positiva), mentre l'onda rifratta sembra andare "dall'altra parte" rispetto all'onda incidente che la "produce".

L'analisi di questo fenomeno direttamente nel sistema K' richiederebbe la descrizione particolareggiata della rifrazione nel caso di mezzi in movimento (compresa una riformulazione delle condizioni al contorno dei campi elettromagnetici), argomento che esula dagli scopi del corso, e forse anche dalle conoscenze di chi scrive. Non posso fare altro che rimandare il lettore interessato al Libro VIII, § 76 [†].

Notiamo comunque che, in ogni caso, stiamo descrivendo soluzioni nella forma di onde piane, ovvero stiamo trascurando completamente gli effetti transienti, sicuramente presenti quando un'onda vera (di estensione temporale finita) incide su un mezzo. L'inversione della velocità di fase dell'onda per $\beta > 1/n_R$ si può comunque intuire pensando ad una specie di "effetto stroboscopico": dalle equazioni (5) si vede come l'inversione della velocità di fase sia dovuta al cambiamento di segno della frequenza (e non del vettore d'onda) per effetto della trasformazione di Lorentz.

Nel sistema K l'onda presente nel mezzo si sta propagando effettivamente nella direzione positiva: questo vuol dire che l'energia che incide sulla superficie $x = 0$ si propaga verso la direzione positiva, uscendo poi dalla superficie $x = L$. Potete provare a dimostrare che questa affermazione è in effetti un'affermazione invariante, quindi la stessa cosa viene misurata nel sistema K' [‡]. Nel sistema K' però la velocità del mezzo materiale è tale per cui i fronti d'onda vengono trascinati indietro, e l'onda "sembra" quindi muoversi verso la direzione negativa dell'asse x.

Notiamo, *en passant*, che è possibile avere dei materiali caratterizzati da un indice di rifrazione *negativo* nel sistema di riferimento in cui sono *fermi*: lo studio delle loro proprietà è un argomento attuale di ricerca [§].

5.1 L'esperimento di Fizeau

I risultati ottenuti nel paragrafo precedente portano direttamente ad una descrizione completa dell'esperimento di Fizeau, il quale misura, attraverso metodi interferometrici, la velocità di un'onda elettromagnetica in un mezzo in movimento. Un descrizione particolareggiata di questo esperimento si trova in ogni buon libro di testo sull'elettromagnetismo e sulla relatività.

Nel caso specifico supponiamo che il sistema K sia il laboratorio, mentre il mezzo in movimento sia *fermo* rispetto al riferimento K'. L'espressione per la velocità della luce nel mezzo in movimento, misurata in K, si ottiene quindi dalle espressioni precedenti con la sostituzione $\beta \to -\beta$.

L'esperimento è di solito analizzato considerando il fatto che la velocità del mezzo nel sistema di laboratorio è molto minore della velocità della luce. L'espressione per la velocità delle onde elettromagnetiche nel mezzo si ottiene sviluppando in serie di Taylor rispetto a β l'equazione (6)

$$v_{ph} = c\frac{1 + \beta n_R}{n_R + \beta}$$

[†] L.D. Landau, E.M. Lifšits, *Corso di Fisica Teorica, Vol. 8: Elettrodinamica dei mezzi continui*, Editori Riuniti, edizioni Mir (1986).

[‡] La quantità invariante è in questo caso la velocità *relativa* v_r tra l'onda e la superficie $x = 0$. Provate a scriverla in modo che sia evidente "a vista" la sua proprietà di invarianza, ovvero come funzione di prodotti scalari di quadrivettori.

[§] Si vedano, ad esempio, i seguenti articoli:
P.M. Valanju *et al.*, *Wave Refraction in Negative-Index Media: Always Positive and Very Inhomogeneous*, *Phys. Rev. Lett.* **88**:18 (2002)
S. Foteinopoulou *et al.*, *Refraction in Media with a Negative Refractive Index*, *Phys. Rev. Lett.* **90**:10 (2003).

$$
\begin{aligned}
&= \frac{c}{n_R}\frac{1+\beta n_R}{1-\frac{\beta}{n_R}} \\
&\simeq \frac{c}{n_R}(1+\beta n_R)\left(1-\frac{\beta}{n_R}\right) \\
&\simeq \frac{c}{n_R}\left(1+\beta\left(n_R-\frac{1}{n_R}\right)\right) \\
&= v_0 + v\left(1-\frac{1}{n_R^2}\right)
\end{aligned}
$$

dove $v_0 = c/n_R$ è la velocità della luce nel mezzo *a riposo* ed il coefficiente $\alpha = 1 - 1/n_R^2$ è il coefficiente di trascinamento di Fizeau.

A Effetto Doppler in relatività galileiana

Nel ricavare la formula dell'effetto Doppler abbiamo utilizzato il fatto che la fase di un'onda deve essere invariante al variare del sistema di riferimento: questa affermazione non dipende, evidentemente, dalla particolare legge di trasformazione tra un sistema di riferimento ad un altro e pertanto deve valere, in particolare, in meccanica Newtoniana, dove la trasformazione di coordinate tra un sistema di riferimento e l'altro è la trasformazione di Galileo (che si ottiene dalla trasformazione di Lorentz al primo ordine in v/c).

Possiamo quindi dedurre le formule per l'effetto Doppler nel caso galileiano: queste formule, che valgono in generale per qualsiasi tipo di onda, sono importanti per capire la precisione necessaria agli esperimenti che servono a "discriminare" fra le trasformazioni di Galileo e quelle di Lorentz, quando gli esperimenti sono fatti con onde elettromagnetiche.

In quanto segue ci limiteremo al caso particolare in cui l'onda si propaga lungo l'asse x, che è la stessa direzione della velocità relativa tra i sistemi K e K'. La trattazione del caso generale ed alcuni interessanti commenti si possono trovare sull'ottimo libro di Jackson ¶.

Come è noto le trasformazioni di Galileo dal sistema K al sistema K' sono

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

Utilizzando l'invarianza di fase per un'onda che si propaga, in generale, con velocità $v_0 = \omega/k$ otteniamo

$$\begin{aligned} k'x' - \omega't' &= kx - \omega t \\ &= k(x' + vt') - \omega t' \\ &= kx' + (kv - \omega)t' \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} k' &= k \\ \omega' &= \omega - kv = \omega\left(1 - \frac{v}{v_0}\right) \\ v_0' &= \frac{\omega'}{k'} = v_0 - v \end{aligned}$$

L'unico effetto del cambiamento di sistema di riferimento sulle caratteristiche dell'onda è quindi quello di cambiarne la frequenza e la velocità. La lunghezza d'onda è, nel caso galileiano, un invariante. Questo non deve stupire dal momento che la lunghezza d'onda è la distanza di due massimi consecutivi *allo stesso istante*, ed in fisica classica la simultaneità e la distanza relativa sono assoluti.

¶J.D. Jackson, *Elettrodinamica classica*, Zanichelli (1988).

B Compito del 15 Aprile 2003

In un sistema di riferimento K' è presente una lastra *ferma* di materiale trasparente con indice di rifrazione $n' = 3/2$ e spessore L. Un raggio di luce di frequenza ω', approssimabile come un'onda piana polarizzata linearmente, incide perpendicolarmente alla lastra. Si considerino gli eventi

- A: il raggio di luce incide sulla lastra
- B: il raggio di luce esce dalla lastra

e se ne scrivano le coordinate nel sistema K'.

La luce è prodotta con frequenza ω da una sorgente *ferma* in un riferimento K rispetto alla cui origine la lastra si *allontana* con velocità v. Si calcolino:

- La relazione tra la frequenza ω' e la frequenza ω
- Le coordinate degli eventi A e B nel sistema di riferimento K
- L'indice di rifrazione n della lastra in moto nel sistema di riferimento K

e se ne diano i valori numerici se $\omega = 4 \times 10^{15}$ Hz, e $v/c = 2/3$.

L'ampiezza del campo elettrico dell'onda incidente, misurato nel sistema di riferimento K', è $E'_0 = 1$ statvolt/cm. Si calcolino:

- Il coefficiente di riflessione della lastra nel sistema di riferimento K'
- L'ampiezza del campo elettrico dell'onda riflessa nel sistema di riferimento K'
- La frequenza dell'onda riflessa nel sistema di riferimento K
- L'ampiezza del campo elettrico dell'onda incidente e dell'onda riflessa nel sistema di riferimento K

Ricordiamo che se il sistema K' si allontana con velocità v rispetto all'asse x di un sistema di riferimento K, la legge di trasformazione della componente del campo elettrico lungo l'asse y è

$$E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z)$$

Si consiglia *vivamente* di sostituire i valori numerici come ultimo passaggio.