Esercizi

Vettore di Poynting e pressione di radiazione quantità di moto del campo elettromagnetico

1.

Un tratto di filo di conducibilità σ è percorso da una corrente I stazionaria, discutere il bilancio dell'energia locale relativo ad un tratto infinitesimo Δl sapendo che la sua sezione circolare ha raggio a.

All'interno del filo, in base alla legge di Ohm, è presente un campo elettrico $\vec{j} = \sigma\,\vec{E}$ dove $|\vec{j}| = I/(\pi a^2)$, per cui $|\vec{E}| = I/(\pi a^2 \sigma)$.
Il campo magnetico sulla superficie del filo vale $|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{a}$ e circola intorno al filo.
Data la configurazione dei campi risulta presente sulla superficie del filo un vettore di Poynting diretto verso l'interno del filo $(-\hat{r})$ di valore

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} = -\hat{r}\frac{1}{\mu_0}E\,B = -\hat{r}\frac{I}{\pi a^2 \sigma}\frac{1}{4\pi}\frac{2I}{a} \tag{1}$$

corrispondente ad una potenza entrante nel filo pari a

$$-\int \vec{S} \cdot d\vec{a} = |\vec{S}| 2\pi a = I^2 \frac{1}{\sigma}\frac{\Delta l}{\pi a^2} = I^2\,(\Delta R) \tag{2}$$

dove (ΔR) è la resistenza elettrica relativa al tratto di filo Δl, $(\Delta R = \frac{1}{\sigma}\frac{\Delta l}{\pi a^2})$ e $I^2\,\Delta R$ è proprio la potenza dissipata per effetto Joule nel tratto di filo in esame.
Conclusione la conservazione dell'energia non è soltanto valida per tutto il sistema filo-batteria, ma anche per ogni tratto locale di filo.

2.

La pressione di radiazione esercitata dalla radiazione solare sulle particelle di pulviscolo che compongono le code delle comete produce la classica "coda luminosa" disposta sempre in direzione opposta al sole. Calcolare gli effetti della radiazione solare e confrontarla con gli effetti della forza gravitazionale dovuta la sole, dimostrare che i granelli più piccoli sono quelli soggetti alla pressione dovuta alla radiazione.

Assumiamo i granelli sferici (di raggio a) e che assorbano TUTTA la radiazione incidente. Troviamo il raggio (a_0) di quei granelli per cui forza gravitazionale attrattiva e forza di radiazione si equilibrano, cioè

$$\frac{I}{c}\pi a_0^2 = \frac{P}{\pi r^2\, c} = G\frac{M_\odot\, m}{r^2}$$

dove $M_\odot$ è la massa del sole, m quella del granello, r la distanza dal sole e I l'intensità della radiazione. Quest'ultima vale $I = P/(\pi r^2)$ dove $P \approx 3.9 \times 10^{26}$ watt è la potenza emessa dal sole (sulla terra $I \approx 1380$ watt/m^2, senza considerare l'assorbimento da parte dell'atmosfera). In conclusione assumendo il granello sferico ($m = \rho * (4/3)\pi a^3$ con densità pari alla densità media della terra ($\rho \approx 3 \times 10^3$ Kg/m^3), si ottiene

$$a_0 = \frac{3P}{16\pi c G\rho M} \approx 1.9 \times 10^{-7} \text{ m}$$

Per $a > a_0$ la forza gravitazionmale prevale ed i granelli sono attratti verso il sole, per $a < a_0$ i granelli vengono respinti e si allontanano dal sole formando la tipica coda.

3.

Un condensatore sferico (raggio dell'armatura intera a e di quella esterna b) accumula una carica Q. L'armatura interna è riempita di materiale uniformemente magnetizzato con magnetizzazione $\mathbf{M} = \hat{z}M$ e quindi manifesta un momento di dipolo magnetico $\mathbf{m} = (4/3 * \pi a^3)\,\mathbf{M}$
Nel condensatore è dunque presente un campo magnetico:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\mathbf{m}\cdot\hat{\mathbf{r}})\,\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}}{r^3} = B_r\hat{\mathbf{r}} + B_\theta\hat{\theta} + B_\phi\hat{\phi}$$

con $B_r = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m}{r^3}\cos\theta$, $B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m}{r^3}\sin\theta$ e $B_\phi = 0$; ed un campo elettrico:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = E_r\hat{\mathbf{r}} \ ,$$

($E_\theta = E_\phi = 0$).
Il vettore di Poynting risulta

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{4\pi}\,Q\,\frac{\mathbf{m}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^5} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{4\pi}\hat{\phi}\frac{Q|\mathbf{m}|}{r^5}\sin\theta$$

La densità di quantità di moto presente nel campo $\mathbf{g} = \mathbf{S}/c^2$ induce la presenza di una densità di momento angolare del campo $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{g}$. Risulta
$l_z = r|\mathbf{g}| \sin\theta$
$l_\perp = r|\mathbf{g}| \cos\theta$
ed il momento angolare totale del campo $\mathbf{L}^{\text{campo}} = \int dV\, \mathbf{l} = (L_z^{\text{campo}}, L_\perp^{\text{campo}})$ con $dV = r^2\, dr\, \sin\theta\, d\theta\, d\phi$ si ottiene

$$\begin{aligned} L_\perp^{\text{campo}} &= \int dV\, l_\perp = 0 \\ L_z^{\text{campo}} &= \int dV\, l_z = \frac{2}{3}\frac{1}{c^2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q|\mathbf{m}| \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \end{aligned}$$

Ora per studiare gli effetti meccanici sulle armature e vedere se a questo momento angolare del campo corrisponda un analogo momento angolare meccanico, occorre studiare gli effetti delle forze magnetiche sulle correnti durante il periodo di carica del condensatore, le uniche forze che possono indurre momento angolare perché perpendicolari al moto delle cariche (riflettere sul fatto che le forze elettriche agenti sul sistema non possono indurre momento angolare).

Se chiamimao $\pm q(t)$ la carica presente sulle armature ad un certo istante di tempo t, sotto ad un angolo θ la carica sull'armatura esterna risulterà

$$\begin{aligned} q(\theta, t) &= -q(t)\frac{\text{superficie sotto } \theta}{\text{superficie totale}} \\ &= -q(t)\,\frac{\int_0^{2\pi}\int_\theta^\pi b^2 d\Omega}{4\pi b^2} \\ &= \frac{2\pi b^2 \int_\theta^\pi \sin\theta d\theta}{4\pi b^2} \\ &= -q(t)\frac{1+\cos\theta}{2} \end{aligned}$$

La corrente che fluisce lungo l'armatura esterna sotto un angolo
θ all'istante t risulta $\hat{\theta}\, i_b(\theta, t) = \hat{\theta}\frac{dq(\theta,t)}{dt} = -\hat{\theta}\frac{1+\cos\theta}{2}\left|\frac{dq(t)}{dt}\right|$, dove $\left|\frac{dq(t)}{dt}\right| = i(t)$ è la corrente che fluisce nel circuito esterno. Sulla zona dell'armatura esterna di lunghezza $dl_b = b\, d\theta$ agisce quindi una forza $d\mathbf{F}_b$,
$d\mathbf{F}_b = i_b\,\hat{\theta}\times\mathbf{B}\, dl_b = i_b\hat{\theta} \times \hat{\mathbf{r}}\, B_r\, dl_b = \hat{\phi}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2|\mathbf{m}|}{b^3}\frac{1+\cos\theta}{2}\cos\theta\, i(t)\, b\, d\theta$ che produce un momento lungo z (il momento trasverso totale si annulla per simmetria)
$d\tau_z = (\mathbf{r} \times d\mathbf{F}_b)_z = \hat{z}\cdot(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\phi})\, b\,|d\mathbf{F}_b| = \hat{z}\cdot\hat{\theta}\, b\,|d\mathbf{F}_b| = b\,|d\mathbf{F}_b|\, \sin\theta$

Il momento della forza totale risulta:
$\tau_{b,z} = \int \frac{d\tau_z}{d\theta} d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2}{3} \frac{|\mathbf{m}|}{b} i(t)$ corrispondente ad una variazione di momento angolare totale sull'armatura esterna (inizialmente a momento angolare zero), pari a

$$L_{b,z}^{\text{meccanico}} = \int dt \, \frac{dL_{b,z}^{\text{meccanico}}}{dt} = \int dt \, \tau_{b,z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{2}{3} \frac{Q|\mathbf{m}|}{b}$$

dove si è usato $\int dt \, i(t) = Q$ e $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$.
L'analogo calcolo per la forza sull'armatura esterna risulta (il segno è dovuto al segno opposto della carica accumulata e quindi della corrente i_a),

$$L_{a,z}^{\text{meccanico}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{2}{3} \frac{Q|\mathbf{m}|}{a}$$

in totale quindi

$$L_z^{\text{meccanico}} = -\frac{2}{3} \frac{1}{c^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q|\mathbf{m}| \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

e perciò

$$\mathbf{L}^{\text{campo}} + \mathbf{L}^{\text{meccanico}} = 0 \ \ !!$$