

## Polarizzazione di un'onda elettromagnetica piana

Note da: Classical Electrodynamics di John David Jackson

Consideriamo un'onda piana (monocromatica) il cui campo elettrico è linearmente polarizzato lungo la direzione  $\mathbf{e}_1$ ,

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_1 E_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}.$$

Un'onda polarizzata in una direzione indipendente  $\mathbf{e}_2$  ( $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$ ) può anch'essa essere soluzione della stesse equazioni di Maxwell con la stessa pulsazione e numero d'onda

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_2 E_2 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}.$$

Allora le due onde piane (propagantesi in un mezzo omogeneo ed isotropo caratterizzato dalle permeabilità  $\epsilon$  e  $\mu$  costanti)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= \mathbf{e}_1 E_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{e}_2 E_2 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \\ \text{con} \\ \mathbf{B}_{1,2} &= \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{1,2}}{|\mathbf{k}|} E_{1,2}\end{aligned}$$

possono essere combinate per dare la più generale soluzione piana monocromatica che si propaga nella direzione  $\mathbf{k}$  in un mezzo omogeneo ed isotropo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{e}_1 E_1 + \mathbf{e}_2 E_2) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad (1)$$

Le ampiezze  $E_1, E_2$  sono numeri *complessi* per permettere fasi diverse tra le due onde polarizzate.

Se le ampiezze  $E_1, E_2$  hanno la stessa fase l'equazione (1) rappresenta un'onda linearmente polarizzata

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{e}_1 |E_1| + \mathbf{e}_2 |E_2|) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\alpha)}$$

che fa un angolo  $\alpha = \tan^{-1}(|E_2|/|E_1|)$  rispetto alla direzione  $\mathbf{e}_1$  e modulo  $|E| = \sqrt{|E_1|^2 + |E_2|^2}$ .

Se  $E_1, E_2$  hanno la stessa ampiezza  $E_0$  e sono sfasate di  $\pm\pi/2$  l'equazione (1) rappresenta un'onda circolarmente polarizzata. Ovvero: l'equazione(1) diviene

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= (\mathbf{e}_1 E_0 + \mathbf{e}_2 E_0 e^{\pm i\pi/2}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \\ &= E_0 (\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}.\end{aligned} \quad (2)$$

Se si assume ora che l'onda si propaghi lungo l'asse  $z$ ,  $\mathbf{k} = \hat{z}|\mathbf{k}| = \hat{z}k$ , possiamo assumere  $\mathbf{e}_1 = \hat{x}$  e  $\mathbf{e}_2 = \hat{y}$ , ovvero nelle direzioni  $x$ ,  $y$ . Prendendo le parti reali della (2) le componenti  $E_x$ ,  $E_y$  divengono:

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= +E_0 \cos(kz - \omega t) \\ E_y(z, t) &= \mp E_0 \sin(kz - \omega t) \end{aligned}$$

In un punto fisso ( $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ ) nello spazio il modulo del vettore  $\mathbf{E}$  è costante  $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = E_0$  mentre  $E_x/E = \cos(\phi_0 - \omega t) = \cos(\omega t - \phi_0)$  ed  $E_y/E = \mp \sin(\phi_0 - \omega t) = \pm \sin(\omega t - \phi_0)$  (con  $\phi_0 = kz_0$ ), ovvero il vettore  $\mathbf{E}$  ruota in un cerchio in verso antiorario nel caso  $\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2$  nella (2) (questo stato di polarizzazione è detto ad elicità positiva) e nel verso orario per  $\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2$  nella (2) (elicità negativa). I due stati di polarizzazione (ad elicità positiva e negativa) possono a loro volta essere usati come stati di base per definire un qualunque altro stato di polarizzazione (al posto di  $\mathbf{e}_1$  ed  $\mathbf{e}_2$ ). Si possono introdurre i vettori complessi ortogonali ed unitari:

$$\mathbf{e}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2) \quad (3)$$

con proprietà di ortonormalità (terna  $\mathbf{e}_{\pm}$ ,  $\mathbf{e}_z = \hat{z} = \mathbf{e}_3$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\pm}^* \cdot \mathbf{e}_{\mp} &= 0 \\ \mathbf{e}_{\pm}^* \cdot \mathbf{e}_3 &= 0 \\ \mathbf{e}_{\pm}^* \cdot \mathbf{e}_{\pm} &= 1 \\ &\text{etc...} \end{aligned}$$

Allora una rappresentazione generale equivalente alla (1) è

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{e}_+ E_+ + \mathbf{e}_- E_-) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (4)$$

dove  $E_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 - iE_2)$ ,  $E_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 + iE_2)$  sono ampiezze complesse. Se  $E_+$ ,  $E_-$  hanno moduli diversi ma la stessa fase, l'eq.(4) rappresenta un'onda polarizzata ellitticamente con assi principali dell'ellisse nelle direzioni  $\mathbf{e}_1$  ed  $\mathbf{e}_2$  (che per semplicità possono essere assunte lungo  $x$  ed  $y$  rispettivamente, l'onda si propagherà lungo  $z$ ); si avrà per le parti (reali) fisiche

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= +\frac{1}{\sqrt{2}}(E_+ + E_-) \cos(kz - \omega t) \\ E_y(z, t) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(E_+ - E_-) \sin(kz - \omega t) \end{aligned}$$

ovvero

$$\left[ \frac{E_x}{+\frac{1}{\sqrt{2}}(E_+ + E_-)} \right]^2 + \left[ \frac{E_y}{-\frac{1}{\sqrt{2}}(E_+ - E_-)} \right]^2 = \left[ \frac{E_x}{a} \right]^2 + \left[ \frac{E_y}{b} \right]^2 = 1.$$

Quindi il rapporto del semiasse maggiore al semiasse minore vale

$$\frac{a}{|b|} = \frac{1 + E_-/E_+}{1 - E_-/E_+} = \frac{1 + r}{1 - r}.$$

Se le ampiezze hanno una fase diversa tra di loro così che  $E_-/E_+ = re^{i\alpha}$ , allora si può mostrare che l'ellisse tracciato dal vettore  $\mathbf{E}$  ha il suo asse ruotato di un angolo  $\alpha/2$ . Per  $r = \pm 1$  si ritorna al caso di onde polarizzate linearmente.