**Polarizzazione di un'onda elettromagnetica piana**

*Note da:* Classical Electrodynamics *di John David Jackson*

Consideriamo un'onda piana (monocromatica) il cui campo elettrico è linearmente polarizzato lungo la direzione $\mathbf{e}_1$,
$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_1\, E_1\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$.
Un'onda polarizzata in una direzione indipendente $\mathbf{e}_2$ ($\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$) può anch'essa essere soluzione della stesse equazioni di Maxwell con la stessa pulsazione e numero d'onda
$\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_2\, E_2\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$.
Allora le due onde piane (propagantesi in un mezzo omogeneo ed isotropo caratterizzato dalle permeabilità $\epsilon$ e $\mu$ costanti)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{e}_1\, E_1\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{e}_2\, E_2\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \\ \text{con} & \\ \mathbf{B}_{1,2} &= \sqrt{\mu\epsilon}\, \frac{\mathbf{k}\times\mathbf{e}_{1,2}}{|\mathbf{k}|}\, E_{1,2} \end{aligned}$$

possono essere combinate per dare la più generale soluzione piana monocromatica che si propaga nella direzione $\mathbf{k}$ in un mezzo omogeneo ed isotropo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{e}_1\, E_1 + \mathbf{e}_2\, E_2)\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \tag{1}$$

Le ampiezze $E_1$, $E_2$ sono numeri *complessi* per permettere fasi diverse tra le due onde polarizzate.
*Se le ampiezze $E_1 = |E_1|\, e^{i\alpha_1}$, $E_2 = |E_2|\, e^{i\alpha_2}$ hanno la stessa fase*, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, l'equazione (1) rappresenta un'onda *linearmente polarizzata*

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{e}_1\, |E_1| + \mathbf{e}_2\, |E_2|)\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\alpha)}$$

che fa un angolo $\theta = \tan^{-1}(|E_2|/|E_1|)$ rispetto alla direzione $\mathbf{e}_1$ e modulo $|E| = \sqrt{|E_1|^2 + |E_2|^2}$.
*Se $E_1$, $E_2$ hanno la stessa ampiezza $E_0$ e sono sfasate di $\pm\pi/2$* l'equazione (1) rappresenta un'onda *circolarmente polarizzata*. Ovvero: l'equazione (1) diviene

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= (\mathbf{e}_1\, E_0 + \mathbf{e}_2\, E_0\, e^{\pm i\pi/2})\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \\ &= E_0\, (\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2)\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Se si assume ora che l'onda si propaghi lungo l'asse $z$, $\mathbf{k} = \hat{z}|\mathbf{k}| = \hat{z}k$, possiamo assumere $\mathbf{e}_1 = \hat{x}$ e $\mathbf{e}_2 = \hat{y}$, ovvero nelle direzioni $x$, $y$. Prendendo le parti reali della (2) le componenti $E_x$, $E_y$ divengono:

$$
\begin{aligned}
E_x(z,t) &= +E_0 \cos(k\,z - \omega t) \\
E_y(z,t) &= \mp E_0 \sin(k\,z - \omega t)
\end{aligned}
$$

In un punto fisso ($\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$) nello spazio il modulo del vettore $\mathbf{E}$ è costante $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = E_0$ mentre $E_x/E = \cos(\phi_0 - \omega t) = \cos(\omega t - \phi_0)$ ed $E_y/E = \mp \sin(\phi_0 - \omega t) = \pm \sin(\omega t - \phi_0)$ (con $\phi_0 = kz_0$), ovvero il vettore $\mathbf{E}$ ruota in un cerchio in verso antiorario nel caso $\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2$ nella (2) (questo stato di polarizzazione è detto ad elicità positiva) e nel verso orario per $\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2$ nella (2) (elicità negativa). I due stati di polarizzazione (ad elicità positiva e negativa) possono a loro volta essere usati come stati di base (al posto di $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$) per definire un qualunque altro stato di polarizzazione. Si possono introdurre i vettori complessi ortogonali ed unitari:

$$
\mathbf{e}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2) \tag{3}
$$

con proprietà di ortonormalità (terna $\mathbf{e}_\pm$, $\mathbf{e}_z = \hat{z} = \mathbf{e}_3$)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_\pm^* \cdot \mathbf{e}_\mp &= 0 \\
\mathbf{e}_\pm^* \cdot \mathbf{e}_3 &= 0 \\
\mathbf{e}_\pm^* \cdot \mathbf{e}_\pm &= 1 \\
&\text{etc...}
\end{aligned}
$$

Allora una rappresentazione generale equivalente alla (1) è

$$
\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = (\mathbf{e}_+\,E_+ + \mathbf{e}_-\,E_-)\,e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \tag{4}
$$

dove $E_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(E_1 - i\,E_2)$, $E_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(E_1 + i\,E_2)$ sono ampiezze complesse. Se *$E_+$, $E_-$ hanno moduli diversi ma la stessa fase*, l'eq.(4) rappresenta un'onda polarizzata ellitticamente con assi principali dell'ellisse nelle direzioni $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$ (che per semplicià possono essere assunte lungo $x$ ed $y$ rispettivamente, l'onda si propagherà lungo $z$); si avrà per le parti (reali) fisiche

$$
\begin{aligned}
E_x(z,t) &= +\frac{1}{\sqrt{2}}\,(E_+ + E_-)\,\cos(k\,z - \omega t) \\
E_y(z,t) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\,(E_+ - E_-)\,\sin(k\,z - \omega t)
\end{aligned}
$$

ovvero

$$\left[\frac{E_x}{+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_+ + E_-\right)}\right]^2 + \left[\frac{E_y}{-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_+ - E_-\right)}\right]^2 = \left[\frac{E_x}{a}\right]^2 + \left[\frac{E_y}{b}\right]^2 = 1\,.$$

Quindi il rapporto del semiasse maggiore al semiasse minore vale

$$\frac{a}{|b|} = \frac{1 + E_-/E_+}{1 - E_-/E_+} = \frac{1+r}{1-r}\,.$$

Se le ampiezze hanno una fase diversa tra di loro così che $E_-/E_+ = re^{i\alpha}$, allora si può mostrare che l'ellisse tracciato dal vettore $\mathbf{E}$ ha il suo asse ruotato di un angolo $\alpha/2$. Per $r = \pm 1$ si ritorna al caso di onde polarizzate linearmente.