Equazioni di Maxwell nei mezzi e indice di rifrazione[1]

I campi elettrici e magnetici (nel vuoto) sono descritti dalle equazioni di Maxwell (in unità MKSA)

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\varrho}{\epsilon_0} &(1)\\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &(2)\\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 &(3)\\
\nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &(4)
\end{aligned}$$

In presenza di materia, le stesse equazioni possono essere scritte

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{D} &= \varrho_{\text{lib}} &(5)\\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &(6)\\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 &(7)\\
\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j}_{\text{lib}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &(8)
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} &(9)\\
\mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \ . &(10)\\
& &(11)
\end{aligned}$$

Le precedenti equazioni possono essere semplificate nei casi in cui esista una relazione semplice tra i vettori Polarizzazione $\mathbf{P}$ e Magnetizzazione $\mathbf{M}$ ed il campo elettrico $\mathbf{E}$ e campo $\mathbf{H}$, rispettivamente. Ad esempio, nel caso di materiali omogenei ed isotropi non ferromagnetici

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \approx \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi^e \mathbf{E} = \\
&= \epsilon_0 (1 + \chi^e) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} &(12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \approx \mu_0 (\mathbf{H} + \chi^m \mathbf{H}) = \\
&= \mu_0 (1 + \chi^m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \ . &(13)
\end{aligned}$$

[1] La prima parte di questo testo è analoga alle note su "**Equazioni delle onde [1]**".

Si noti che si è supposta una relazione lineare tra i vettori **D** ed **E** e **B** ed **H**, che sarà valida solo per deboli campi (quando gli effetti dipendenti da potenze più elevate dei campi inducenti negli sviluppi

$$\begin{aligned} P_\alpha(\mathbf{E}) &= P_\alpha(\mathbf{E}=0) + \sum_\beta \left.\frac{\partial P_\alpha}{\partial E_\beta}\right|_{\mathbf{E}=0} E_\beta + \frac{1}{2}\sum_{\beta\gamma} \left.\frac{\partial^2 P_\alpha}{\partial E_\beta \partial E_\gamma}\right|_{\mathbf{E}=0} E_\beta E_\gamma + ... \\ M_\alpha(\mathbf{H}) &= M_\alpha(\mathbf{H}=0) + \sum_\beta \left.\frac{\partial M_\alpha}{\partial H_\beta}\right|_{\mathbf{H}=0} H_\beta + \frac{1}{2}\sum_{\beta\gamma} \left.\frac{\partial^2 M_\alpha}{\partial H_\beta \partial H_\gamma}\right|_{\mathbf{H}=0} H_\beta H_\gamma + ... \end{aligned}$$

possono essere trascurati). Imoltre si noti che, pur supponendo di restringersi all'ordine più basso, cioè ad una relazione lineare, tale relazione potrebbe essere scritta attraverso un tensore di rango 2, includendo così il caso di mezzi non isotropi. La relazione tra le componenti è quindi scrivibile (per materiali non ferromagnetici, perciò con magnetizzazione residua nulla e non "elettreti", cioè con polarizzazione residua nulla)

$$\begin{aligned} P_\alpha/\epsilon_0 &= \sum_\beta \chi^e_{\alpha\beta} E_\beta = \chi^e_{\alpha\beta} E_\beta \ , \\ M_\alpha &= \sum_\beta \chi^m_{\alpha\beta} H_\beta = \chi^m_{\alpha\beta} H_\beta \ , \end{aligned}$$

avendo utilizzato la convenzione di implicita somma su indici ripetuti.

Onde nei mezzi dielettrici omogenei ed isotropi

Nei mezzi dielettrici omogenei ed isotropi ed in assenza di cariche e correnti libere, le equazioni di Maxwell acquistano la forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{14}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{15}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{16}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{17}$$

da cui (con tecniche simili all'elettrodinamica nel vuoto, cioè calcolando $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}$ e $\nabla \times \nabla \times \mathbf{B}$) si ottengono le equazioni delle onde nei mezzi omogenei ed isotropi, ovvero

$$\nabla^2 \mathbf{E} \quad - \quad \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \ ; \tag{18}$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} \quad - \quad \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \ ; \tag{19}$$

da cui si evince che la velocità di fase dell'onda è modificata

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{n} \leq c \ ,$$

n è chiamato indice di rifrazione e per la stragrande maggioranza dei dielettrici vale

$$n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \approx \sqrt{\epsilon_r} \quad \text{e} \quad \mu_r \approx 1 \ .$$

Si ha anche che l'ortogonalità tra il campo elettrico e magnetico è valida mentre la relazione tra i moduli è determinata da

$$\mathbf{k}^2 = \mu\epsilon\, \omega^2 = \frac{n^2}{c^2}\, \omega^2 \tag{20}$$

e contemporaneamente da

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega\, \mathbf{B} \quad \left[\text{da } \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathrm{t}}\right] \\ \mathbf{k} \times \mathbf{B} &= \mu\epsilon\, \omega \mathbf{E} \quad \left[\text{da } \nabla \times \mathbf{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathrm{t}}\right] \end{aligned}$$

e risulta

$$\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{B}|} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{n} = v \ . \tag{21}$$

Indice di rifrazione nel modello ad elettroni oscillanti

Nell'ipotesi di elettroni legati elasticamente nella materia, il moto del singolo elettrone è determinato dall'equazione del moto classica

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{\mathbf{F}_{\text{ext}}}{m_e} \tag{22}$$

dove la forza totale sull'elettrone tiene conto di contributi esterni, oltre alla forza di richiamo elastica e quella dissipativa

$$\mathbf{F}_{\text{totale}} = -m_e\omega_0^2\mathbf{r} - m_e\gamma\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{F}_{\text{ext}} = m_e\ddot{\mathbf{r}}$$

dove m_e è la massa a riposo dell'elettrone. Assumiamo che l'elettrone sia sollecitato da un'onda elettromagnetica piana (polarizzata linearmente lungo $\hat{z}$ e monocromatica di frequenza $\nu = \omega/2\pi$), caratterizzata da i campi

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(y,t) &= \hat{z}\, E_0 e^{i(ky-\omega t)} \\
\mathbf{B}(y,t) &= \hat{x}\, B_0 e^{i(ky-\omega t)} \\
B_0 &= E_0 \frac{n}{c}
\end{aligned} \tag{23}$$

con $n/c = 1/v$ velocità di fase della radiazione nel mezzo come già discusso. Nella posizione ($y = 0$) dell'elettrone si ottiene che lo stesso obbedisce alle-quazione

$$\ddot{z} + \gamma z + \omega_0^2 z = \frac{q_e}{m_e}\ E_0|_{\text{locale}}\, e^{-i\omega t} \tag{24}$$

dove q_e è la carica dell'elettrone. La soluzione stazionaria

$$z(t) = z_0 e^{-i\omega t}\ ,$$

della (24) diviene

$$z(t) = \frac{q_e}{m_e}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}\ E_0|_{\text{locale}}\, e^{-i\omega t}\ . \tag{25}$$

Il contributo di ogni singolo elettrone al vettore polarizzazione risulta in un momento di dipolo indotto dato da

$$\mathbf{p} = q_e\mathbf{r}(t) = q_e\hat{z}\, z(t)$$

ovvero

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} &= \frac{q_e^2}{m_e}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}\ \mathbf{E}_0|_{\text{locale}}\, e^{-i\omega t} = \\
&= \epsilon_0\frac{q_e^2}{\epsilon_0 m_e}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}\ \mathbf{E}|_{\text{locale}} = \\
&= \epsilon_0\alpha\ \mathbf{E}|_{\text{locale}} \\
&\approx \epsilon_0\alpha\,\mathbf{E}\ ,
\end{aligned} \tag{26}$$

dove la polarizzabilità atomica vale

$$\alpha = \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \tag{27}$$

ed è complessa.

L'ultima (approssimata) relazione di uguaglianza suppone che l'elettrone, immerso nella materia **localmente** sia sollecitato dal campo elettrico **medio** ivi presente. Si suppone cioè che la presenza della materia influenzi in modo molto debole l'elettrone, in pratica la materia è molto diluita di modo che campo elettrico **locale** (dovuto alla somma dei campi esterni e quelli dovuti alla presenza delle altre cariche nella materia) coincida coi campi esterni. Si può non ricorrere a questa ipotesi che ci farà restringere i risultati ai materiali poco densi, utilizzando le equazioni di Clausius-Mossotti per i campi locali. Torneremo a discuterne.

Dal momento indotto $\mathbf{p}$ a livello microscopico si può risalire al momento di dipolo indotto per unità di volume $\mathbf{P}$ attraverso il numero di elettroni per unità di volume N, ovvero

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= N\mathbf{p} = \epsilon_0 N \alpha \mathbf{E} = \\ &= \epsilon_0 \left[\frac{N q_e^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right] \mathbf{E} = \\ &= \epsilon_0 \, \chi_e \, \mathbf{E} \ , \end{aligned} \tag{28}$$

che definisce la suscettività calcolata nel modello ad oscillatori

$$\begin{aligned} \chi_e &= \left[\frac{N q_e^2}{\epsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right] = \\ &= (\epsilon_r - 1) = n^2 - 1 = \\ &= (n+1)(n-1) \approx 2(n-1) \ , \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è valida nel limite (implicita nell'ipotesi di materiali poco densi e quindi di campi locali approssimabili dal campo medio) di valori dell'indice di rifrazione n molto vicini all'unità. In conclusione l'indice di rifrazione risulta complesso con parte reale $n_R = \Re n$ e parte immaginaria $n_I = \Im n$, ovvero

$$n = |n|e^{i\psi} = \sqrt{n_R^2 + n_I^2}\, e^{i\psi} \; . \tag{29}$$

con

$$\begin{aligned} n_R &= 1 + \frac{1}{2}\,\frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e}\,\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \\ n_I &= \frac{1}{2}\,\frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e}\,\frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \end{aligned} \tag{30}$$

ovvero anche il vettore d'onda $\mathbf{k}$ risulta complesso (vedi (20))

$$\begin{aligned} k_R &= \frac{\omega}{c}\, n_R \; ; \\ k_I &= \frac{\omega}{c}\, n_I \; ; \end{aligned} \tag{31}$$

provocando uno sfasamento nei capi (23) ed un'attenuazione:

$$\begin{aligned} B_0 &= E_0 \frac{n}{c} = E_0 \frac{|n|}{c}\, e^{i\psi} \\ \mathbf{E}(y,t) &= \hat{z}\, E_0\, e^{-\frac{n_I}{c}\omega y}\, e^{i(\frac{n_R}{c}\omega y - \omega t)} \\ \mathbf{B}(y,t) &= \hat{x}\, E_0 \frac{|n|}{c}\, e^{-\frac{n_I}{c}\omega y}\, e^{i(\frac{n_R}{c}\omega y - \omega t + \psi)} \; . \end{aligned} \tag{32}$$

In particolare l'attenuazione (assorbimento) è legata alla parte immaginaria dell'indice di rifrazione che ha il suo massimo in $\omega = \omega_0$. $N_I(\omega)$ è fortemente piccato intorno alla frequenza di risonanza. La pate reale $n_R(\omega)$ dell'indice di rifrazione regola i fenomeni di dispersione *normale* (per $\omega \ll \omega_0$)) ed *anomala* (per $\omega \approx \omega_0$). In partiocolare per $\omega \ll \omega_0$ l'indire di rifrazione risulta praticamente reale ed *aumenta* con l'aumentare di ω dando ragione del fenomeno della dispersione di mezzi trasparenti nella regione del visibile (esempio dispersione in aria, in acqua o in materiali vetrosi). Nella regione della dispersione anomale $n_R(\omega)$ *diminuisce* all'aumentare di ω.
I materiali possono essere caratterizzati da molte frequenze proprie intorno alle quali l'indice di rifrazione ripete l'andamento descritto. L'aria, l'acqua, il vetro sono caratterizzati da frequenze proprie situate nell'ultravioletto.

Materiali densi

Nei materiali densi il campo elettrico locale non può essere approssimato dal campo elettrico medio come fatto nelle equazioni (26), occorre piuttosto poter approssimare la relazione tra campo medio e campo locale. Questa relazione è fornita dall'ipotesi di una geometria sferica per la cavità atomica, in questo caso vale

$$\mathbf{E}|_{\text{locale}} = \mathbf{E} + \frac{1}{3}\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$$

e le (26) e (28) divengono

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{q_e^2}{m_e}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}\ \mathbf{E}_0|_{\text{locale}}\, e^{-i\omega t} = \\ &= \epsilon_0 \alpha\ \mathbf{E}|_{\text{locale}}\ , \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= N\mathbf{p} = \epsilon_0 N\alpha\ \mathbf{E}|_{\text{locale}} = \\ &= \epsilon_0 N\alpha \left[\mathbf{E} + \frac{1}{3}\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}\right] = \\ &= \epsilon_0 \frac{N\alpha}{1 - \frac{1}{3}N\alpha}\,\mathbf{E} \\ &= \epsilon_0\, \chi_e\, \mathbf{E} \\ &= \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\,\mathbf{E} \\ &= \epsilon_0(n^2 - 1)\,\mathbf{E}\ . \end{aligned} \tag{34}$$

Perciò per i materiali densi, la relazione tra la polarizzabilità atomica (27) e l'indice di rifrazione diviene

$$(n^2 - 1) = \frac{N\alpha}{1 - \frac{1}{3}N\alpha}\ ,$$

ovvero

$$3\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = N\alpha\ . \tag{35}$$