Laboratorio di Misure Fisiche per Scienze Biologiche

PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI

Cap. 2-3 Taylor

Misure dirette: singola misura / misure ripetute — si ottiene un risultato del tipo t = 8.1 ± 0.1 sec

Misure indirette:

supponiamo di aver misurato x,y,... con rispettivi errori Δx, Δy,....

$$x \pm \Delta x \quad \Longrightarrow \quad x - \Delta x \le x \le x + \Delta x \quad \text{cioe'} \quad x_{MIN} \le x \le x_{MAX}$$
$$y \pm \Delta y \quad \Longrightarrow \quad y - \Delta y \le y \le y + \Delta y \quad \text{cioe'} \quad y_{MIN} \le y \le y_{MAX}$$

Per la **somma** $s = x + y$ avremo

$$s_{MIN} = x_{MIN} + y_{MIN} = x - \Delta x + y - \Delta y = x + y - (\Delta x + \Delta y)$$
$$\Longrightarrow \Delta s = \Delta x + \Delta y$$
$$s_{MAX} = x_{MAX} + y_{MAX} = x + \Delta x + y + \Delta y = x + y + (\Delta x + \Delta y)$$

Per la **differenza** $d = x - y$ avremo

$$d_{MIN} = x_{MIN} - y_{MAX} = x - \Delta x - y - \Delta y = x - y - (\Delta x + \Delta y)$$
$$\Longrightarrow \Delta d = \Delta x + \Delta y$$
$$d_{MAX} = x_{MAX} - y_{MIN} = x + \Delta x - y + \Delta y = x - y + (\Delta x + \Delta y)$$

Per cui possiamo concludere che:

***per somma e differenza, gli errori assoluti si sommano*.**

Vedi esempi pag. 37

Per prodotto e quoziente ci conviene riscrivere $x \pm \Delta x = x\,(1 \pm \frac{\Delta x}{x})$

Prodotto $p = x\,y$

$$p_{MIN} = x_{MIN}\, y_{MIN} = xy\,(1 - \frac{\Delta x}{x})\,(1 - \frac{\Delta y}{y}) = xy\,(1 - \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta y}{y} + \cancel{\frac{\Delta x}{x}\frac{\Delta y}{y}}) = xy\,(1 - (\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}))$$

$$p_{MAX} = x_{MAX}\, y_{MAX} = xy\,(1 + \frac{\Delta x}{x})\,(1 + \frac{\Delta y}{y}) = xy\,(1 + \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \cancel{\frac{\Delta x}{x}\frac{\Delta y}{y}}) = xy\,(1 + (\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}))$$

quindi $\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} \quad \Longrightarrow p = p\,(1 \pm \frac{\Delta p}{p}) = p \pm \Delta p$ Vedi esempi pag. 27

Quoziente $q = \frac{x}{y}$

Ricordando lo sviluppo in serie di $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2$ .... e fermandoci al primo termine

$$q_{MIN} = \frac{x_{MIN}}{y_{MAX}} = \frac{x(1-\frac{\Delta x}{x})}{y(1+\frac{\Delta y}{y})} \cong \frac{x}{y}\ (1- \frac{\Delta x}{x})\ (1- \frac{\Delta y}{y}) = \ldots\ldots\ldots = \frac{x}{y}\ (1- (\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}))$$

$$q_{MAX} = \frac{x_{MAX}}{y_{MIN}} = \frac{x(1+\frac{\Delta x}{x})}{y(1-\frac{\Delta y}{y})} \cong \frac{x}{y}\ (1+ \frac{\Delta x}{x})\ (1+ \frac{\Delta y}{y}) = \ldots\ldots\ldots = \frac{x}{y}\ (1+ (\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}))$$

quindi $\frac{\Delta q}{q} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$ ==> $q = q\ (1 \pm \frac{\Delta q}{q}) = q \pm \Delta q$

per prodotto e quoziente gli errori relativi si sommano.

Vedi esempi pag. 40

CASI PARTICOLARI:

- **prodotto di una grandezza per un numero** es. $g = B\ x$

$$\frac{\Delta g}{g} = \cancel{\frac{\Delta B}{B}} + \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta x}{x} \quad ==> \Delta g = g\frac{\Delta x}{x} = B\ \Delta x$$

- **potenze** es. $f = x^N = x\ x \ldots x$ N volte

$$\frac{\Delta f}{f} = \underbrace{\frac{\Delta x}{x} + \ldots\ldots \frac{\Delta x}{x}}_{\text{N volte}} = N\ \frac{\Delta x}{x}$$

ESEMPIO

Misuriamo il tempo impiegato da un oggetto a cadere da un'altezza misurabile, e otteniamo

$t = 1.6 \pm 0.1$ sec

$h = 14.1 \pm 0.1$ m

Ricavare il valore dell'accelerazione di gravita' e la velocita' dell'oggetto prima di toccare terra, con i rispettivi errori.

Possiamo utilizzare la relazione $h = \frac{1}{2}gt^2$ ===> $g = \frac{2h}{t^2}$ = 11.0 m/sec^2

Dimostrare che Δg = 1.4 m/sec^2 ==> risultato g = 11.0 ± 1.4 m/sec^2

Utilizzando $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$ oppure $v^2 = v_0^2 + 2gh$ ==> $v = \sqrt{2gh}$ = 17.6 m/sec e Δv = ?