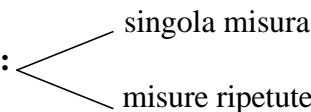


Laboratorio di Misure Fisiche per Scienze Biologiche

PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI

Cap. 2-3 Taylor

Misure dirette:  si ottiene un risultato del tipo $t = 8.1 \pm 0.1$ sec

singola misura

misure ripetute

Misure indirette:

supponiamo di aver misurato x, y, \dots con rispettivi errori $\Delta x, \Delta y, \dots$

$$\begin{aligned} x \pm \Delta x &\implies x - \Delta x \leq x \leq x + \Delta x && \text{cioe' } && x_{\text{MIN}} \leq x \leq x_{\text{MAX}} \\ y \pm \Delta y &\implies y - \Delta y \leq y \leq y + \Delta y && \text{cioe' } && y_{\text{MIN}} \leq y \leq y_{\text{MAX}} \end{aligned}$$

Per la **somma** $s = x + y$ avremo

$$s_{\text{MIN}} = x_{\text{MIN}} + y_{\text{MIN}} = x - \Delta x + y - \Delta y = x + y - (\Delta x + \Delta y)$$

$$\implies \Delta s = \Delta x + \Delta y$$

$$s_{\text{MAX}} = x_{\text{MAX}} + y_{\text{MAX}} = x + \Delta x + y + \Delta y = x + y + (\Delta x + \Delta y)$$

Per la **differenza** $d = x - y$ avremo

$$d_{\text{MIN}} = x_{\text{MIN}} - y_{\text{MAX}} = x - \Delta x - y - \Delta y = x - y - (\Delta x + \Delta y)$$

$$\implies \Delta d = \Delta x + \Delta y$$

$$d_{\text{MAX}} = x_{\text{MAX}} - y_{\text{MIN}} = x + \Delta x - y + \Delta y = x - y + (\Delta x + \Delta y)$$

Per cui possiamo concludere che:

per somma e differenza, gli errori assoluti si sommano.

Vedi esempi pag. 37

Per prodotto e quoziente ci conviene riscrivere $x \pm \Delta x = x \left(1 \pm \frac{\Delta x}{x}\right)$

Prodotto $p = x y$

$$p_{\text{MIN}} = x_{\text{MIN}} y_{\text{MIN}} = xy \left(1 - \frac{\Delta x}{x}\right) \left(1 - \frac{\Delta y}{y}\right) = xy \left(1 - \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta x}{x} \frac{\Delta y}{y}\right) = xy \left(1 - \left(\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}\right)\right)$$

$$p_{\text{MAX}} = x_{\text{MAX}} y_{\text{MAX}} = xy \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right) = xy \left(1 + \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta x}{x} \frac{\Delta y}{y}\right) = xy \left(1 + \left(\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}\right)\right)$$

$$\text{quindi } \frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} \implies p = p \left(1 \pm \frac{\Delta p}{p}\right) = p \pm \Delta p$$

Vedi esempi pag. 27

Quoziente $q = \frac{x}{y}$

Ricordando lo sviluppo in serie di $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 \dots$ e fermanoci al primo termine

$$q_{\text{MIN}} = \frac{x_{\text{MIN}}}{y_{\text{MAX}}} = \frac{x(1 - \frac{\Delta x}{x})}{y(1 + \frac{\Delta y}{y})} \cong \frac{x}{y} (1 - \frac{\Delta x}{x}) (1 - \frac{\Delta y}{y}) = \dots = \frac{x}{y} (1 - (\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}))$$

$$q_{\text{MAX}} = \frac{x_{\text{MAX}}}{y_{\text{MIN}}} = \frac{x(1 + \frac{\Delta x}{x})}{y(1 - \frac{\Delta y}{y})} \cong \frac{x}{y} (1 + \frac{\Delta x}{x}) (1 + \frac{\Delta y}{y}) = \dots = \frac{x}{y} (1 + (\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}))$$

quindi $\frac{\Delta q}{q} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} \implies q = q (1 \pm \frac{\Delta q}{q}) = q \pm \Delta q$

per prodotto e quoziente gli errori relativi si sommano.

Vedi esempi pag. 40

CASI PARTICOLARI:

- **prodotto di una grandezza per un numero** es. $g = B \cdot x$

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta x}{x} \implies \Delta g = g \frac{\Delta x}{x} = B \Delta x$$

- **potenze** es. $f = x^N = x \cdot x \cdot \dots \cdot x$ N volte

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta x}{x} + \dots + \frac{\Delta x}{x} = N \frac{\Delta x}{x}$$

N volte

ESEMPIO

Misuriamo il tempo impiegato da un oggetto a cadere da un'altezza misurabile, e otteniamo

$$t = 1.6 \pm 0.1 \text{ sec}$$

$$h = 14.1 \pm 0.1 \text{ m}$$

Ricavare il valore dell'accelerazione di gravita' e la velocita' dell'oggetto prima di toccare terra, con i rispettivi errori.

Possiamo utilizzare la relazione $h = \frac{1}{2} g t^2 \implies g = \frac{2h}{t^2} = 11.0 \text{ m/sec}^2$

Dimostrare che $\Delta g = 1.4 \text{ m/sec}^2 \implies$ risultato $g = 11.0 \pm 1.4 \text{ m/sec}^2$

Utilizzando $\frac{1}{2} m v^2 = mgh$ oppure $v^2 = v_0^2 + 2gh \implies v = \sqrt{2gh} = 17.6 \text{ m/sec}$ e $\Delta v = ?$