# Fisica 2 per biotecnologie: Prova Scritta 1 Luglio 2011

**Scrivere immediatamente, <u>ED IN EVIDENZA</u>, sui due fogli protocollo consegnati (ed eventuali altri fogli richiesti) NOME COGNOME e MATRICOLA sulla sinistra, TESTO A (o B) sulla destra.**

## Testo A

**per superare la prova è necessario accumulare almeno 18 punti**

**(tempo a disposizione 3 ore)**

**1.)** In una fotocellula della radiazione ultravioletta fornisce sufficiente energia agli elettroni presenti nel bario metallico per espellerli dalla sua superficie. Si vuole misurare l'energia (cinetica) massima di questi elettroni utilizzando una lastra metallica a potenziale negativo in modo da fermare gli elettroni emessi. Calcolare la velocità massima a cui vengono emessi gli elettroni sapendo che la differenza di potenziale tra i due conduttori necessaria ad arrestare gli elettroni più veloci è pari a $-3.02$ Volt se intorno ad essi è fatto il vuoto. (**È bene giustificare le formule che si usano**). (**punti 4**)

**2.)** Una spira quadrata di lato 24.0 cm ha resistenza di $5.20\,\Omega$ La spira viene posta inizialmente in un piano normale ad un campo magnetico di intensità 0.7 Tesla. Successivamente la spira viene rimossa dal campo e questa operazione richiede 40.0 msec. Calcolare l'energia elettrica dissipata durante il processo di estrazione della spira. (**È bene giustificare le formule che si usano**). (**punti 6**)

**3.)** Le microonde della radiazione cosmica di fondo invadono tutto lo spazio con una densità di energia media di $4 \cdot 10^{-14}$ Joule/m$^3$.

a) Determinare il valore quadratico medio ($\langle \vec{E}^{\,2} \rangle$) del campo elettrico associato alla radiazione di fondo.

b) A che distanza da un trasmettitore di onde radio sferiche da 20 KWatt il segnale emesso ha lo stesso valore quadratico medio del campo elettrico della radiazione di fondo? (**È importante almeno commentare le formule che si usano**). (**punti 6**)

**4.)** Un fascio di luce è costituito da due componenti di lunghezza d'onda rispettivamente di 720 nm e 660 nm; esso incide su di una coppia di fenditure separate di 0.58 mm e la figura di interferenza viene osservata su uno schermo posto a 1.00 m di distanza dalle fenditure.

Calcolare la distanza tra le due frange del secondo ordine relative alle due lunghezze d'onda incidenti. (**È importante almeno commentare le formule che si usano**). (**punti 4**)

**5.)** Qual'è la *massima* lunghezza d'onda di una radiazione in grado di ionizzare l'atomo di idrogeno? (Si ricorda che l'energia dello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno vale $E_1 = -13.6$ eV).

Facendo incidere su di un atomo di idrogeno radiazione di lunghezza d'onda $\lambda = 40.3$ nm, l'elettrone espulso dall'atomo di idrogeno che energia cinetica *minima* avrà ?

(**Commentare gli aggettivi "*massima*" e "*minima*" utilizzati nel testo**). (**punti 4**)

**6.)** Utilizzando il modello di Bohr per l'atomo di idrogeno (che presenta un singolo elettrone) si possono studiare i livelli energetici degli atomi ionizzati fino a possedere un unico elettrone legato.

Studiare i livelli dell'atomo di $Li^{2+}$ doppiamente ionizzato (l'atomo neutro di Litio risulta essere ${}^{6}_{3}Li$).

Stimare, applicando il modello di Bohr, il raggio dell'orbita di un elettrone che si trova nell'orbita più interna ($n = 1$) di un atomo di Uranio ($Z = 92$). Quanta energia sarebbe necessaria (approssimativamente) per rimuovere questo elettrone? (**Commentare le formule usate**). (**punti 6**)

**7.)** Il Fosforo ${}^{32}_{15}P$ (massa atomica $m = 31.97$ uma) ha tempo di dimezzamento $T_{1/2} = 14.262$ giorni.

a) In un campione di Fosforo ${}^{32}_{15}P$ puro di massa M = 9.7 $\mu$g quanti nuclei sono presenti?

b) e dopo un anno?

c) che attività presentava all'inizio? e dopo un anno?

d) quanto tempo deve passare perché l'attività scenda al 20% dell'attività iniziale?

(**Commentare le formule usate**). (**punti 6**)

---

Valori utili:
- valore della carica elementare $q_e = 1.602 \times 10^{-19}$ Coulomb.
- costante di Planck $h = 6.626 \times 10^{-34}\, Joule \cdot sec$
- $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k_e \approx (2.998)^2 \times 10^9$ N·m$^2$ / C$^2$ ; $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\, Tesla \cdot m/Ampere$
- massa dell'elettrone $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ Kg
- velocità della luce $2.998 \times 10^8$ m/sec
- numero di Avogadro $6.022 \times 10^{23}$ mole$^{-1}$

# Fisica 2 per biotecnologie: Prova Scritta 1 Luglio 2011

**Scrivere immediatamente, <u>ED IN EVIDENZA</u>, sui due fogli protocollo consegnati (ed eventuali altri fogli richiesti) NOME COGNOME e MATRICOLA sulla sinistra, TESTO A (o B) sulla destra.**

## Testo B

**per superare la prova è necessario accumulare almeno 18 punti**

**(tempo a disposizione 3 ore)**

**1.)** In una fotocellula della radiazione ultravioletta fornisce sufficiente energia agli elettroni presenti nel bario metallico per espellerli dalla sua superficie. Si vuole misurare l'energia (cinetica) massima di questi elettroni utilizzando una lastra metallica a potenziale negativo in modo da fermare gli elettroni emessi. Calcolare la velocità massima a cui vengono emessi gli elettroni sapendo che la differenza di potenziale tra i due conduttori necessaria ad arrestare gli elettroni più veloci è pari a $-1.51$ Volt se intorno ad essi è fatto il vuoto. (**È bene giustificare le formule che si usano**). (**punti 4**)

**2.)** Una spira circolare di superficie pari a 576 cm$^2$ ha resistenza di $5.20\,\Omega$ La spira viene posta inizialmente in un piano normale ad un campo magnetico di intensità 0.7 Tesla. Successivamente la spira viene rimossa dal campo e questa operazione richiede 20.0 msec. Calcolare l'energia elettrica dissipata durante il processo di estrazione della spira. (**È bene giustificare le formule che si usano**). (**punti 6**)

**3.)** Le microonde della radiazione cosmica di fondo invadono tutto lo spazio con una densità di energia media di $4 \cdot 10^{-14}$ Joule/m$^3$.

a) Determinare il valore quadratico medio ($\langle \vec{E}^{\,2} \rangle$) del campo elettrico associato alla radiazione di fondo.

b) A che distanza da un trasmettitore di onde radio sferiche da 10 KWatt il segnale emesso ha lo stesso valore quadratico medio del campo elettrico della radiazione di fondo? (**È importante almeno commentare le formule che si usano**). (**punti 4**)

**4.)** Un fascio di luce è costituito da due componenti di lunghezza d'onda rispettivamente di 660 nm e 550 nm; esso incide su di una coppia di fenditure separate di 0.72 mm e la figura di interferenza viene osservata su uno schermo posto a 2.00 m di distanza dalle fenditure.

Calcolare la distanza tra le due frange del secondo ordine relative alle due lunghezze d'onda incidenti. (**È importante almeno commentare le formule che si usano**). (**punti 4**)

**5.)** Qual'è la *massima* lunghezza d'onda di una radiazione in grado di ionizzare l'atomo di idrogeno? (Si ricorda che l'energia dello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno vale -13.6 eV).

Facendo incidere su di un atomo di idrogeno radiazione di lunghezza d'onda $\lambda = 52.6$ nm, l'elettrone espulso dall'atomo di idrogeno che energia cinetica *minima* avrà ?

(**Commentare gli aggettivi "*massima*" e "*minima*" utilizzati nel testo**). (**punti 4**)

**6.)** Utilizzando il modello di Bohr per l'atomo di idrogeno (che presenta un singolo elettrone) si possono studiare i livelli energetici degli atomi ionizzati fino a possedere un unico elettrone legato.

Studiare i livelli dell'atomo di $He^+$ (l'atomo neutro di Elio risulta essere ${}^4_2He$).

Stimare, applicando il modello di Bohr, il raggio dell'orbita di un elettrone che si trova nell'orbita più interna ($n = 1$) di un atomo di Piombo ($Z = 82$). Quanta energia sarebbe necessaria (approssimativamente) per rimuovere questo elettrone? (**Commentare le formule usate**). (**punti 6**)

**7.)** Il Berillio ${}^7_4Be$ (massa atomica $m = 7.02$ uma) ha tempo di dimezzamento $T_{1/2} = 53$ giorni.

a) In un campione di Berillio ${}^7_4Be$ puro di massa M = 8.8 $\mu$g quanti nuclei sono presenti?

b) e dopo tre mesi?

c) che attività presentava all'inizio? e dopo tre mesi?

d) quanto tempo deve passare perché l'attivita scenda al 20% dell'attività iniziale?

(**Commentare le formule usate**). (**punti 6**)

---

Valori utili:
- valore della carica elementare $q_e = 1.602 \times 10^{-19}$ Coulomb.
- costante di Planck $h = 6.626 \times 10^{-34}\, Joule \cdot sec$
- $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k_e \approx (2.998)^2 \times 10^9$ N·m$^2$ / C$^2$ ; $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\, Tesla \cdot m/Ampere$
- massa dell'elettrone $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ Kg
- velocità della luce $2.998 \times 10^8$ m/sec
- numero di Avogadro $6.022 \times 10^{23}$ mole$^{-1}$

# Fisica 2 per biotecnologie
# Prova scritta: 1 Luglio 2011
## Soluzione Testo A

**per superare la prova è necessario accumulare almeno 18 punti**

**1.)** *In una fotocellula radiazione ultravioletta fornisce sufficiente energia a elettroni presenti nel bario metallico per espellerli dalla superficie. Si vuole misurare l'energia (cinetica) massima di questi elettroni utilizzando una lastra metallica a potenziale negativo in modo da fermare gli elettroni emessi. Calcolare la velocità massima a cui vengono emessi gli elettroni sapendo che la differenza di potenziale tra i due conduttori necessaria ad arrestare gli elettroni più veloci è pari a $-3.02$ Volt se intorno ad essi è fatto il vuoto.*

*Il lavoro fatto su ogni elettrone dal potenziale esterno vale*

$$q_e V_{ext}$$

*e deve uguagliare l'energia cinetica* **massima** $T_e$ *degli elettroni se vogliano che* **tutti** *si arrestino, anche quelli più veloci. Quindi*

$$q_e V_{ext} = \frac{1}{2} m_e v^2 = T_e \,,$$

*dove $v$ rappresenta la* **massima** *velocità posseduta dagli elettroni. Ne segue*

$$v = \sqrt{\frac{2\, q_e\, V_{ext}}{m_e}} = \sqrt{\frac{2\, \cdot\, (-1.602\times 10^{-19})\, C\, \cdot (-3.02)\, V}{9.1^{-31}\, Kg}} \approx 1.03\times 10^6\, m/sec$$

**2.)** *Una spira quadrata di lato $l = 24.0$ cm ha resistenza di $R = 5.20\,\Omega$ La spira viene posta inizialmente in un piano normale ad un campo magnetico di intensità $B = 0.7$ Tesla. Successivamente la spira viene rimossa dal campo e questa operazione richiede 40.0 msec. Calcolare l'energia elettrica dissipata durante il processo di estrazione della spira.*

*L'energia elettrica dissipata (che sarà uguale al lavoro fornito per estrarre la spira contro le forze che la corrente indotta subisce dal campo magnetico) andrà dissipata in effetto Joule nella spira. La fem (forza elettromotrice) indotta nella spira vale (in valore assoluto)*

$$fem = \frac{\Delta\phi_B}{\Delta t} = \frac{B\cdot l^2}{\Delta t} \approx \frac{0.7\, Tesla \cdot (0.24\, m)^2}{40\times 10^{-3}\, sec} \approx 1.01\, Volt\,,$$

*dove $\Delta\phi_B$ è la variazione di flusso del campo magnetico subita dalla spira nel tempo $\Delta t$ (legge di Faraday); infatti (data l'ortogonaltà del campo magnetico e la spira, il flusso (zero dopo l'estrazione della spira) all'inizio era*

$$\int \vec{B}\cdot d\vec{a} = \int B\, da = B \int da = B\cdot l^2$$

*dato che il campo è uniforme su tutta la spira. La corrente indotta è quindi ($R$ è la resistenza della spira)*

$$i = \frac{fem}{R} = \frac{1}{R}\frac{\Delta\phi_B}{\Delta t} \approx \frac{1.01\,Volt}{5.20\Omega} \approx 0.19\,Ampere\,.$$

*La potenza dissipata in effetto Joule corrisponde a*

$$R \cdot i^2 = \frac{fem^2}{R} \approx \frac{(1.01\,Volt)^2}{5.20\,\Omega} \approx 0.20\,Watt;$$

*che, nel tempo di estrazione risulta in un'energia dissipata*

$$E = R \cdot i^2 \cdot \Delta t \approx 0.20\,Watt \cdot 40 \times 10^{-3}\,sec \approx 8 \times 10^{-3}\,Joule.$$

**3.)** *Le microonde della radiazione cosmica di fondo invadono tutto lo spazio con una densità di energia media di $4 \cdot 10^{-14}$ Joule/$m^3$.*

*a) Determinare il valore quadratico medio ($\langle \vec{E}^{\,2} \rangle$) del campo elettrico associato alla radiazione di fondo.*

*La densità di energia trasportata dalle onde elettromagnetiche riceve un contributo dal campo elettrico ed uno dal campo magnetico*

$$u = u_E + u_B = \frac{\epsilon_0}{2}\,\langle \vec{E}^{\,2} \rangle + \frac{1}{2\,\mu_0}\,\langle \vec{B}^{\,2} \rangle = \epsilon_0\,\langle \vec{E}^{\,2} \rangle\,,$$

*dato che vale la $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ ed in un onda $E = B \cdot c$ ($c$ è la velocità della luce nel vuoto). Essendo, nel nostro caso,*

$$u \approx 4 \cdot 10^{-14}\,Joule/m^3\,,$$

*se ne deduce*

$$\langle \vec{E}^{\,2} \rangle = \frac{u}{\epsilon_0} \approx \frac{4 \cdot 10^{-14}\,Joule/m^3}{8.84 \times 10^{-12}\,F/m} \approx 0.0045\,(Volt/m)^2\,.$$

*b) A che distanza da un trasmettitore di onde radio sferiche da $P = 20$ KWatt il segnale emesso ha lo stesso valore quadratico medio del campo elettrico della radiazione di fondo?*

*A distanza $d$ dal trasmettitore che emette in maniera sferica, l'intensità $I$ della radiazione risulta essere uguale alla potenza di emissione distribuita sulla superficie sferica di raggio $d$, quindi*

$$I = \epsilon_0\,c\,\langle \vec{E}^{\,2} \rangle = c\,u = \frac{P}{4\pi d^2}\,.$$

*Da cui*

$$d^2 = \frac{P}{4\pi\,c\,u} = \frac{20 \times 10^3\,Watt}{4\pi\,3 \times 10^8\,m/sec\,\cdot 4 \cdot 10^{-14}\,Joule/m^3} \approx 1.33 \times 10^8\,m^2$$

*ovvero*

$$d \approx 1.15 \times 10^4\,m = 11.5\,Km\,.$$

**4.)** *Un fascio di luce è costituito da due componenti di lunghezza d'onda rispettivamente di 720 nm e 660 nm; esso incide su di una coppia di fenditure separate di* $d = 0.58$ *mm e la figura di interferenza viene osservata su uno schermo posto ad* $l = 1.00$ *m di distanza dalle fenditure.*

*Calcolare la distanza tra le due frange del secondo ordine relative alle due lunghezze d'onda incidenti.*

*Le frange dei massimi di interferenza si distribuiscono secondo la legge*

$$d \sin\vartheta = m\lambda \quad (\textit{si noti che} \quad \sin\vartheta \sim \frac{\lambda}{d} \sim 0.001 \sim \vartheta)$$

*e quindi sullo schermo occupano le posizioni*

$$x(\lambda) = l \tan\vartheta \approx l \sin\vartheta = m\,\frac{l\,\lambda}{d} = 2\,\frac{l\,\lambda}{d}\,,$$

*per i massimi di ordine* $m = 2$. *Ne risulta che la differenza richiesta diviene:*

$$\begin{aligned}\Delta x &= x(\lambda_1) - x(\lambda_2) = 2\,\frac{l}{d}\,(\lambda_1 - \lambda_2) = \\ &= 2\,\frac{1.00\,m}{0.58 \times 10^{-3}\,m}\,(720 - 660) \times 10^{-9}\,m \approx 0.2 \times 10^{-3}\,m = 0.2\,mm\,.\end{aligned}$$

**5.)** *Qual'è la massima lunghezza d'onda di una radiazione in grado di ionizzare l'atomo di idrogeno? (Si ricorda che l'energia dello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno vale* $E_1 = -13.6$ *eV).*

*La minima frequenza necessaria al fotone per ionizzare l'atomo di idrogeno corrisponde all'energia di ionizzazione, ovvero un'energia pari, in valore assoluto, all'energia di legame*

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} \geq 13.6\,eV$$

*ovvero*

$$\lambda \leq \frac{hc}{13.6eV} \approx \frac{12.4 \times 10^3\,eV\,\mathring{A}}{13.6\,eV} \approx 911.8\,\mathring{A} = 91.18\,nm\,.$$

*Facendo incidere su di un atomo di idrogeno radiazione di lunghezza d'onda* $\lambda = 40.3$ *nm, l'elettrone espulso dall'atomo di idrogeno che energia cinetica minima avrà ?*

*La conservazione dell'energia impone che l'energia cinetica dell'elettrone* $T_e$ *espulso sia*

$$T_e = h\nu - 13.6\,eV$$

*cioè l'energia cinetica sarà maggiore di zero solo se la frequanza è più della frequenza appena calcolata, ovvero che la lunghezza d'onda sia più piccola di 91.18 nm. Otteniamo*

$$T_e = \frac{hc}{\lambda} - 13.6\,eV \approx \frac{12.4 \times 10^3\,eV\,\mathring{A}}{403\,\mathring{A}} - 13.6\,eV \approx 17.2\,eV \approx 2.76 \times 10^{-18}\,Joule\,.$$

**6.)** *Utilizzando il modello di Bohr per l'atomo di idrogeno (che presenta un singolo elettrone) si possono studiare i livelli energetici degli atomi ionizzati fino a possedere un unico elettrone legato.*

*Studiare i livelli dell'atomo di* $Li^{2+}$ *doppiamente ionizzato (l'atomo neutro di Litio risulta essere* ${}^{6}_{3}Li$*).*

*Le formule del modello di Bohr per l'idrogeno vanno modificate per ioni con carica nucleare* $Ze$ *ed un unico elettrone esterno, in maniera piuttosto semplice. In particolare lo spettro dell'energia diviene*

$$E_n = -\frac{1}{2}\,\frac{m_e(k_e\,Ze^2)^2}{\hbar^2}\,\frac{1}{n^2} = -Z^2\,\frac{1}{2}\,\frac{m_e(k_e\,e^2)^2}{\hbar^2}\,\frac{1}{n^2} \approx -Z^2\,\frac{13.6\,eV}{n^2} \approx -\frac{122.4\,eV}{n^2}\,,$$

*per* $Z = 3$.

*Stimare, applicando il modello di Bohr, il raggio dell'orbita di un elettrone che si trova nell'orbita più interna* ($n = 1$) *di un atomo di Uranio* ($Z = 92$)*. Quanta energia sarebbe necessaria (approssimativamente) per rimuovere questo elettrone?*

*Per stimare il raggio più interno occupato dall'elettrone (la distanza media occupata dall'elettrone più interno) occorre rivisitare le formule per i raggi delle orbite di Bohr, si perviene alla seguente espressione*

$$R_n = n^2\frac{\hbar^2}{k_e\,m_e\,Ze^2} = \frac{n^2}{Z}\,a_0 \approx \frac{n^2}{Z}\,0.53\,\mathring{A} \approx 0.0058\,\mathring{A}$$

*per* $n = 1$ *e* $Z = 92$*. Il raggio è circa 100 volte più piccolo del raggio di Bohr per l'atomo di idrogeno* $a_0 = 0.53\,\mathring{A}$*.*

*Lo spettro di energie è quello sopra ricavato*

$$E_n \approx -Z^2\,\frac{13.6\,eV}{n^2} \approx -115\,KeV \quad per\; n = 1\; e\; Z = 92\,,$$

*occorreranno almeno 115 KeV per rimuovere l'elettrone interno!*

**7.)** *Il Fosforo* ${}^{32}_{15}P$ *(massa atomica* $m = 31.97$ *uma) ha tempo di dimezzamento* $T_{1/2} =$ *14.262 giorni.*

*a) In un campione di Fosforo* ${}^{32}_{15}P$ *puro di massa* $M = 9.7\,\mu g$ *quanti nuclei sono presenti?*

*In 31.97 gr di campione (una mole) sono presenti un numero di Avogadro* ($N_A$) *di atomi, quindi*

$$N(0) = N_A\,\frac{9.7\times10^{-6}\,gr}{31.97\,gr} \approx 1.83\times10^{17}\,;$$

*b) e dopo un anno?*

*Dopo un anno saranno rimasti*

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t} = 1.83\times10^{17}\,e^{-0.00486\cdot365} \approx 3.63\times10^{9}$$

*dove* $t = 365$ *giorni (un anno), e*

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \approx \frac{0.693}{14.262} \approx 0.0486\, giorni^{-1}\,.$$

*c) che attività presentava all'inizio? e dopo un anno?*

*L'attività coincide con il numero di disintegrazioni in un certo lasso di tempo, ovvero col valore assoluto di* $dN/dt$*,*

$$\begin{aligned}\left.\frac{dN(t)}{dt}\right|_{t=0} &= \lambda \cdot N(0) = 0.0486\, giorni^{-1} \cdot 1.83 \times 10^{17} = \\ &\approx 8.89 \times 10^{15}\, disintegrazioni/giorno = \\ &\approx 1.03 \times 10^{11}\, disintegrazioni/sec\,;\end{aligned}$$

*e dopo un anno*

$$\begin{aligned}\left.\frac{dN(t)}{dt}\right|_{t=365\,g} &= \lambda \cdot N(365\,g) = 0.0486\, giorni^{-1} \cdot 3.63 \times 10^{9} = \\ &\approx 1.76 \times 10^{8}\, disintegrazioni/giorno = \\ &\approx 2.04 \times 10^{3}\, disintegrazioni/sec\,;\end{aligned}$$

*d) quanto tempo deve passare perché l'attivita scenda al 20% dell'attività iniziale?*

$$\frac{dN/dt|_t}{dN/dt|_{t=0}} = e^{-\lambda t} = 0.2\,,$$

*ovvero*

$$t = -\frac{\ln 0.2}{\lambda} \approx \frac{1.609}{0.0486} \approx 33.12\, giorni\,.$$

# Fisica 2 per biotecnologie
# Prova scritta: 1 Luglio 2011
## Soluzione Testo B
### per superare la prova è necessario accumulare almeno 18 punti

**1.)** *In una fotocellula radiazione ultravioletta fornisce sufficiente energia a elettroni presenti nel bario metallico per espellerli dalla superficie. Si vuole misurare l'energia (cinetica) massima di questi elettroni utilizzando una lastra metallica a potenziale negativo in modo da fermare gli elettroni emessi. Calcolare la velocità massima a cui vengono emessi gli elettroni sapendo che la differenza di potenziale tra i due conduttori necessaria ad arrestare gli elettroni più veloci è pari a* $-1.51$ *Volt se intorno ad essi è fatto il vuoto.*

*Il lavoro fatto su ogni elettrone dal potenziale esterno vale*

$$q_e V_{ext}$$

*e deve uguagliare l'energia cinetica* **massima** $T_e$ *degli elettroni se vogliano che* **tutti** *si arrestino, anche quelli più veloci. Quindi*

$$q_e V_{ext} = \frac{1}{2}\, m_e v^2 = T_e\,,$$

*dove* $v$ *rappresenta la* **massima** *velocità posseduta dagli elettroni. Ne segue*

$$v = \sqrt{\frac{2\, q_e\, V_{ext}}{m_e}} = \sqrt{\frac{2\,\cdot\,(-1.602\times 10^{-19})\,C\,\cdot(-1.51)\,V}{9.1^{-31}\,Kg}} \approx 0.73\times 10^6\, m/sec$$

**2.)** *Una spira circolare di superficie* $S = 576\, cm^2$ *ha resistenza di* $R = 5.20\,\Omega$. *La spira viene posta inizialmente in un piano normale ad un campo magnetico di intensità* $B = 0.7$ *Tesla. Successivamente la spira viene rimossa dal campo e questa operazione richiede 20.0 msec. Calcolare l'energia elettrica dissipata durante il processo di estrazione della spira.*

*L'energia elettrica dissipata (che sarà uguale al lavoro fornito per estrarre la spira contro le forze che la corrente indotta subisce dal campo magnetico) andrà dissipata in effetto Joule nella spira. La fem (forza elettromotrice) indotta nella spira vale (in valore assoluto)*

$$fem = \frac{\Delta\phi_B}{\Delta t} = \frac{B\cdot S}{\Delta t} \approx \frac{0.7\,Tesla\cdot 0.0576\, m^2}{20\times 10^{-3}\, sec} \approx 2.02\, Volt\,,$$

*dove* $\Delta\phi_B$ *è la variazione di flusso del campo magnetico subita dalla spira nel tempo* $\Delta t$ *(legge di Faraday); infatti (data l'ortogonaltà del campo magnetico e la spira, il flusso (zero dopo l'estrazione della spira) all'inizio era*

$$\int \vec{B}\cdot d\vec{a} = \int B\, da = B\int da = B\cdot S$$

*dato che il campo è uniforme su tutta la spira. La corrente indotta è quindi ($R$ è la resistenza della spira)*

$$i = \frac{fem}{R} = \frac{1}{R}\frac{\Delta\phi_B}{\Delta t} \approx \frac{2.02\,Volt}{5.20\Omega} \approx 0.39\,Ampere\,.$$

*La potenza dissipata in effetto Joule corrisponde a*

$$R \cdot i^2 = \frac{fem^2}{R} \approx \frac{(2.02\,Volt)^2}{5.20\,\Omega} \approx 0.78\,Watt$$

*che, nel tempo di estrazione risulta in un'energia dissipata*

$$E = R \cdot i^2 \cdot \Delta t \approx 0.78\,Watt \cdot 20 \times 10^{-3}\,sec \approx 1.56 \times 10^{-2}\,Joule.$$

**3.)** *Le microonde della radiazione cosmica di fondo invadono tutto lo spazio con una densità di energia media di $4 \cdot 10^{-14}$ Joule/m$^3$.*

*a) Determinare il valore quadratico medio ($\langle \vec{E}^{\,2} \rangle$) del campo elettrico associato alla radiazione di fondo.*

*La densità di energia trasportata dalle onde elettromagnetiche riceve un contributo dal campo elettrico ed uno dal campo magnetico*

$$u = u_E + u_B = \frac{\epsilon_0}{2}\,\langle \vec{E}^{\,2} \rangle + \frac{1}{2\,\mu_0}\,\langle \vec{B}^{\,2} \rangle = \epsilon_0\,\langle \vec{E}^{\,2} \rangle\,,$$

*dato che vale la $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ ed in un onda $E = B \cdot c$ ($c$ è la velocità della luce nel vuoto). Essendo, nel nostro caso,*

$$u \approx 4 \cdot 10^{-14}\,Joule/m^3\,,$$

*se ne deduce*

$$\langle \vec{E}^{\,2} \rangle = \frac{u}{\epsilon_0} \approx \frac{4 \cdot 10^{-14}\,Joule/m^3}{8.84 \times 10^{-12}\,F/m} \approx 0.0045\,(Volt/m)^2\,.$$

*b) A che distanza da un trasmettitore di onde radio sferiche da $P = 10$ KWatt il segnale emesso ha lo stesso valore quadratico medio del campo elettrico della radiazione di fondo?*

*A distanza $d$ dal trasmettitore che emette in maniera sferica, l'intensità $I$ della radiazione risulta essere uguale alla potenza di emissione distribuita sulla superficie sferica di raggio $d$, quindi*

$$I = \epsilon_0\,c\,\langle \vec{E}^{\,2} \rangle = c\,u = \frac{P}{4\pi d^2}\,.$$

*Da cui*

$$d^2 = \frac{P}{4\pi\,c\,u} = \frac{10 \times 10^3\,Watt}{4\pi\,3 \times 10^8\,m/sec\,\cdot 4 \cdot 10^{-14}\,Joule/m^3} \approx 0.66 \times 10^8\,m^2$$

*ovvero*

$$d \approx 0.81 \times 10^4\,m = 8.1\,Km\,.$$

**4.)** *Un fascio di luce è costituito da due componenti di lunghezza d'onda rispettivamente di 660 nm e 550 nm; esso incide su di una coppia di fenditure separate di $d = 0.72$ mm e la figura di interferenza viene osservata su uno schermo posto ad $l = 2.00$ m di distanza dalle fenditure.*

*Calcolare la distanza tra le due frange del secondo ordine relative alle due lunghezze d'onda incidenti.*

*Le frange dei massimi di interferenza si distribuiscono secondo la legge*

$$d \sin \vartheta = m\lambda \quad (si\,noti\,che \quad \sin \vartheta \sim \frac{\lambda}{d} \sim 0.001 \sim \vartheta)$$

*e quindi sullo schermo occupano le posizioni*

$$x(\lambda) = l \tan \vartheta \approx l \sin \vartheta = m\, \frac{l\,\lambda}{d} = 2\, \frac{l\,\lambda}{d}\,,$$

*per i massimi di ordine $m = 2$. Ne risulta che la differenza richiesta diviene:*

$$\begin{aligned} \Delta x &= x(\lambda_1) - x(\lambda_2) = 2\, \frac{l}{d}\, (\lambda_1 - \lambda_2) = \\ &= 2\, \frac{2.00\, m}{0.72 \times 10^{-3}\, m}\, (660 - 550) \times 10^{-9}\, m \approx 0.6 \times 10^{-3}\, m = 0.6\, mm\,. \end{aligned}$$

**5.)** *Qual'è la massima lunghezza d'onda di una radiazione in grado di ionizzare l'atomo di idrogeno? (Si ricorda che l'energia dello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno vale $E_1 = -13.6$ eV).*

*La minima frequenza necessaria al fotone per ionizzare l'atomo di idrogeno corrisponde all'energia di ionizzazione, ovvero un'energia pari, in valore assoluto, all'energia di legame*

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} \geq 13.6\, eV$$

*ovvero*

$$\lambda \leq \frac{hc}{13.6eV} \approx \frac{12.4 \times 10^3\, eV\, \AA}{13.6\, eV} \approx 911.8\, \AA = 91.18\, nm\,.$$

*Facendo incidere su di un atomo di idrogeno radiazione di lunghezza d'onda $\lambda = 52.6$ nm, l'elettrone espulso dall'atomo di idrogeno che energia cinetica minima avrà ?*

*La conservazione dell'energia impone che l'energia cinetica dell'elettrone $T_e$ espulso sia*

$$T_e = h\nu - 13.6\, eV$$

*cioè l'energia cinetica sarà maggiore di zero solo se la frequanza è più della frequenza appena calcolata, ovvero che la lunghezza d'onda sia più piccola di 91.18 nm. Otteniamo*

$$T_e = \frac{hc}{\lambda} - 13.6\, eV \approx \frac{12.4 \times 10^3\, eV\, \AA}{526\, \AA} - 13.6\, eV \approx 9.98\, eV \approx 1.60 \times 10^{-18}\, Joule\,.$$

**6.)** *Utilizzando il modello di Bohr per l'atomo di idrogeno (che presenta un singolo elettrone) si possono studiare i livelli energetici degli atomi ionizzati fino a possedere un unico elettrone legato.*

*Studiare i livelli dell'atomo di* $He^+$ *ionizzato (l'atomo neutro di Elio risulta essere* ${}^4_2He$*).*

*Le formule del modello di Bohr per l'idrogeno vanno modificate per ioni con carica nucleare* $Ze$ *ed un unico elettrone esterno, in maniera piuttosto semplice. In particolare lo spettro dell'energia diviene*

$$E_n = -\frac{1}{2}\frac{m_e(k_e\,Ze^2)^2}{\hbar^2}\frac{1}{n^2} = -Z^2\,\frac{1}{2}\frac{m_e(k_e\,e^2)^2}{\hbar^2}\frac{1}{n^2} \approx -Z^2\,\frac{13.6\,eV}{n^2} \approx -\frac{54.4\,eV}{n^2}\,,$$

per $Z = 2$.

*Stimare, applicando il modello di Bohr, il raggio dell'orbita di un elettrone che si trova nell'orbita più interna* ($n = 1$) *di un atomo di Piombo* ($Z = 82$)*. Quanta energia sarebbe necessaria (approssimativamente) per rimuovere questo elettrone?*

*Per stimare il raggio più interno occupato dall'elettrone (la distanza media occupata dall'elettrone più interno) occorre rivisitare le formule per i raggi delle orbite di Bohr, si perviene alla seguente espressione*

$$R_n = n^2\frac{\hbar^2}{k_e\,m_e\,Ze^2} = \frac{n^2}{Z}\,a_0 \approx \frac{n^2}{Z}\,0.53\,\mathring{A} \approx 0.0065\,\mathring{A}$$

*per* $n = 1$ *e* $Z = 82$*. Il raggio è circa 100 volte più piccolo del raggio di Bohr per l'atomo di idrogeno* $a_0 = 0.53\,\mathring{A}$*.*

*Lo spettro di energie è quello sopra ricavato*

$$E_n \approx -Z^2\,\frac{13.6\,eV}{n^2} \approx -91.4\,KeV \quad per\, n = 1\, e\, Z = 82\,,$$

*occorreranno almeno 91.5 KeV per rimuovere l'elettrone interno!*

**7.)** *Il Berillio* ${}^7_4Be$ *(massa atomica* $m = 7.02$ *uma) ha tempo di dimezzamento* $T_{1/2} = 53$ *giorni.*

*a) In un campione di Berillio* ${}^7_4Be$ *puro di massa* $M = 8.8\ \mu g$ *quanti nuclei sono presenti?*

*In 7.02 gr di campione (una mole) sono presenti un numero di Avogadro* ($N_A$) *di atomi, quindi*

$$N(0) = N_A\,\frac{8.8\times 10^{-6}\,gr}{7.02\,gr} \approx 7.55\times 10^{17}\,;$$

*b) e dopo tre mesi?*

*Dopo tre mesi saranno rimasti*

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t} = 7.55\times 10^{17}\,e^{-0.0131\cdot 90} \approx 2.32\times 10^{17}$$

*dove t = 90 giorni (tre mesi), e*

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \approx \frac{0.693}{53} \approx 0.0131 \, giorni^{-1} \, .$$

*c) che attività presentava all'inizio? e dopo tre mesi?*

*L'attività coincide con il numero di disintegrazioni in un certo lasso di tempo, ovvero col valore assoluto di $dN/dt$,*

$$\begin{aligned} \left.\frac{dN(t)}{dt}\right|_{t=0} &= \lambda \cdot N(0) = 0.0131 \, giorni^{-1} \cdot 7.55 \times 10^{17} = \\ &\approx 9.9 \times 10^{15} \, disintegrazioni/giorno = \\ &\approx 1.14 \times 10^{11} \, disintegrazioni/sec \, ; \end{aligned}$$

*e dopo tre mesi*

$$\begin{aligned} \left.\frac{dN(t)}{dt}\right|_{t=90\,g} &= \lambda \cdot N(90\,g) = 0.0131 \, giorni^{-1} \cdot 2.32 \times 10^{17} = \\ &\approx 3.04 \times 10^{15} \, disintegrazioni/giorno = \\ &\approx 3.52 \times 10^{10} \, disintegrazioni/sec \, ; \end{aligned}$$

*d) quanto tempo deve passare perché l'attivita scenda al 20% dell'attività iniziale?*

$$\frac{dN/dt|_t}{dN/dt|_{t=0}} = e^{-\lambda t} = 0.2 \, ,$$

*ovvero*

$$t = -\frac{\ln 0.2}{\lambda} \approx \frac{1.609}{0.0131} \approx 122.9 \, giorni \, .$$