Fisica 2 per biotecnologie: Prova Scritta 2 Settembre 2011

Scrivere immediatamente, <u>ED IN EVIDENZA</u>, sui due fogli protocollo consegnati (ed eventuali altri fogli richiesti) la seguente tabella:

NOME : .... Numero lettere del nome $NN =$ **...........**

COGNOME : .... Numero lettere del Cognome $NC =$ **.................**

MATRICOLA : .... $= NM$

Testo unico

per superare la prova è necessario accumulare almeno 18 punti

(tempo a disposizione 3 ore)

1.) Un elettrone si sta muovendo verso una lastra piana, praticamente infinita, carica negativamente con densità uniforme $\sigma_0 = -NN \times 10^{-8}$ C/m^2. Quando l'elettrone si trova ad una distanza $d = 1.80$ m dalla piastra, la sua velocità vale $v_0 = NN/2 \times 10^7$ m/sec.

Determinare (**commentando le formule usate**):

- la minima distanza dalla piastra a cui arriverà l'elettrone; (**punti 3**)

- il potenziale elettrico in tale punto assumendo nullo il potenziale della piastra. (**punti 3**)

2.) Un solenoide lungo $L_0 = NC$ cm e con un numero di spire totali pari a $n_0 = 5000$, ha sezione circolare di diametro $D_0 = NC/5$ cm. Nelle spire circola una corrente stazionaria continua $I_0 = 0.2$ A.

Determinare (**commentando le formule usate**):

- il campo magnetico all'interno del solenoide trascurando effetti ai bordi; (**punti 2**)

- la forza elettromotrice indotta in una spira circolare concentrica ed esterna al solenoide, (raggio $a_0 = NC$ cm $> D_0/2$) se la corrente nel solenoide viene spenta (si assuma che la corrente nelle spire del solenoide vari nel tempo t secondo la legge $I(t) = I_0 e^{-kt}$ con $k > 0$, durante lo spegnimento); (a questo stadio dare la formula della f.e.m. in funzione di k); (**punti 4**)

- il valore numerico di k sapendo che l'energia dissipata nella spira esterna al solenoide durante lo spegnimento, se questa ha una resistenza pari ad $R = 10$ Ohm, risulta di 2×10^{-5} Joule. (**punti 6**)

Cosa cambierebbe se la spira esterna, pur restando perpendicolare all'asse del solenoide, non fosse concentrica con esso? (**commentare**). (**punti 4**)

3.) In uno spettro di emissione l'itensità della radiazione emessa viene riportata in un grafico in funzione di $r = 1/\lambda$, ovvero l'inverso della lunghezza d'onda. La distanza tra due picchi risulta di $\Delta r = NM/10$ cm^{-1}, quanto vale la differenza di energia tra i livelli delle molecole che emettono la radiazione relativa ai due picchi? (**commentare le formule usate**). (**punti 5**)

4.) L'energia di legame dei due atomi che formano la molecola di idrogeno è tale che occorrono 110 kcal/mole per ridurre l'idrogeno ad idrogeno monoatomico. Si hanno a disposizione NC moli. Quale massima lunghezza d'onda deve avere la radiazione in grado di separarli? (**commentare le formule usate**). (**punti 4**)

5.) Ricordando che, in fisica quantistica, alle particelle con quantità di moto $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ è associata un'onda di lunghezza d'onda $\lambda = h/|\mathbf{p}|$, dove h è la costante di Planck, si prepari un esperimento da doppia fenditura in cui le fenditure sono separate da $4\,\mu m$. Gli elettroni incidono sulle fenditure dopo essere stati accelerati da una differenza di potenziale di 100 Volt. Trovare la distanza tra i primi due massimi su di uno schermo fluorescente posto a distanza $L = 2 \cdot NC$ metri. (**commentare le formule usate**). (**punti 6**)

Valori utili:
- valore della carica elementare $q_e = 1.602 \times 10^{-19}$ Coulomb.
- costante di Planck $h = 6.626 \times 10^{-34}\, Joule \cdot sec$
- $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k_e \approx (2.998)^2 \times 10^9$ N·m^2 / C^2 ; $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$ Tesla · m/Ampere
- massa dell'elettrone $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ Kg
- velocità della luce 2.998×10^8 m/sec
- numero di Avogadro 6.022×10^{23} mole^{-1}
- equivalente meccanico del calore: 4.1868 Joule/cal

Fisica 2 per biotecnologie
Prova scritta: 2 Settembre 2011
Soluzione Testo unico
per superare la prova è necessario accumulare almeno 18 punti

1.) *Un elettrone si sta muovendo verso una lastra piana, praticamente infinita, e carica negativamente con densità uniforme $\sigma_0 = -NN \times 10^{-8}$ C/m^2. Quando l'elettrone si trova ad una distanza $d = 180$ cm dalla piastra, la sua velocità vale $v_0 = NN/2 \times 10^7$ m/sec.*

Determinare:

- la minima distanza dalla piastra a cui arriverà l'elettrone;

La forza (repulsiva) che il campo elettrico della piastra esercita sull'elettrone vale

$$\mathbf{F}_e = q_e \mathbf{E} = -q_e \frac{|\sigma_0|}{2\epsilon_0}\,\hat{\mathbf{x}}$$

(dove $\hat{\mathbf{x}}$ è il versore che punta verso l'elettrone uscendo perpendicolarmente dalla piastra e q_e è il valore assoluto della carica elementare). Il lavoro fatto su ogni elettrone dal potenziale

$$V_\sigma(x) = \frac{|\sigma_0|}{2\epsilon_0}\,x + V_0\,, \tag{1}$$

dovuto alla piastra nel passaggio dell'elettrone dalla distanza d alla distanza $\bar{x}$ in cui si arresta, vale

$$q_e\,[V_\sigma(d) - V_\sigma(\bar{x})] = q_e \frac{|\sigma_0|}{2\epsilon_0}\,[d - \bar{x}]$$

e deve uguagliare l'energia cinetica T_e iniziale dell' elettrone perché la forza elettrica è conservativa. Quindi

$$q_e\,[V_\sigma(d) - V_\sigma(\bar{x})] = q_e \frac{|\sigma_0|}{2\epsilon_0}\,[d - \bar{x}] = \frac{1}{2}\,m_e v_0^2\,,$$

da cui

$$\bar{x} = d - \frac{m_e v_0^2}{4\pi\, q_e \frac{|\sigma_0|}{4\imath\epsilon_0}}$$

Si noti che nella (1), V_0 è il potenziale della piastra ($V_\sigma(x = 0) = V_0$).

In conclusione (in funzione del numero di lettere NN ed NC)

$$\begin{aligned}
\bar{x}(\text{metri}) &\approx 1.80\,\mathrm{m} - \frac{9.1 \times 10^{-31}\,\mathrm{Kg} \cdot \left(\frac{NN}{2}\right)^2 \times 10^{14}\,(\mathrm{m/sec})^2}{4\pi \cdot 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot (2.998)^2 \times 10^9\,\mathrm{N \cdot m^2/C^2} \cdot NN \times 10^{-8}\,\mathrm{C}} \\
&\approx 1.80\,\mathrm{m} - 0.126\,NN\,\mathrm{m} \\
&\approx 1.30\,\mathrm{m} \quad (\text{se NC} = 4\,\text{e}\,\text{NN} = 4)\,.
\end{aligned}$$

- il potenziale elettrico in tale punto assumendo nullo il potenziale della piastra, risulta:

$$\begin{aligned} V_\sigma(\bar{x}) &= \frac{|\sigma_0|}{2\epsilon_0} \cdot \bar{x} = 2\pi\, \frac{|\sigma_0|}{4\pi\epsilon_0} \cdot \bar{x} \\ &\approx 2\pi \cdot (2.998)^2 \times 10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2} \cdot NN \times 10^{-8}\,\mathrm{C/m^2} \cdot \bar{x} \\ &\approx 564.73 \cdot NN\,\mathrm{Volt/m} \cdot [1.80\,\mathrm{m} - 0.126\,NN\,\mathrm{m}] \\ &\approx 2937\,\mathrm{Volt} \quad (\mathrm{se\ NC} = 4\,\mathrm{e}\,\mathrm{NN} = 4)\,. \end{aligned}$$

2.) *Un solenoide lungo $L_0 = NC$ cm e con un numero di spire totali pari a $n_0 = 5000$, ha sezione circolare di diametro $D_0 = NC/5$ cm. Nelle spire circola una corrente stazionaria continua $I_0 = 0.2$ A.*

Determinare:

*- il campo magnetico all'interno del solenoide trascurando effetti ai bordi; (**punti 2**)*

*Il campo magnetico **B** si ricava dalla legge di Ampere e risulta:*

$$|\mathbf{B}| = \mu_0 \frac{n}{L_0}\, I_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Tesla \cdot m/A} \cdot \frac{5000}{NC/100\,\mathrm{m}} \cdot 0.2\,\mathrm{A} \approx \frac{0.1257}{NC}\,\mathrm{Tesla}\,, \qquad (2)$$

uniforme all'interno del solenoide, parallelo al suo asse e confinato all'interno (trascurando effetti di bordo).

- la forza elettromotrice indotta in una spira circolare concentrica ed esterna al solenoide, (raggio $a_0 = NC$ cm $> D_0/2$) se la corrente nel solenoide viene spenta (si assuma che la corrente nelle spire del solenoide vari nel tempo t secondo la legge $I(t) = I_0 e^{-kt}$ con $k > 0$, durante lo spegnimento); (a questo stadio dare la formula della f.e.m. in funzione di k);

La f.e.m. indotta dipende dalle variazioni di flusso del campo magnetico concatenato con la spira esterna, dunque dal flusso attraverso la superficie del solenoide essendo nullo il campo esterno ad esso, (ponendo $R_0 = D_0/2 = NC/10\,\mathrm{cm}$):

$$\begin{aligned} fem &= -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \mathbf{B}(t)\cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt}\,|\mathbf{B}(t)|\,\pi R_0^2 = \\ &= -\pi R_0^2\, \frac{d}{dt}\left[\mu_0 \frac{n}{L_0}\, I_0\, e^{-kt}\right] = \pi R_0^2\, \mu_0 \frac{n}{L_0}\, k\, I_0\, e^{-kt} \end{aligned} \qquad (3)$$

- il valore numerico di k sapendo che l'energia dissipata nella spira esterna al solenoide durante lo spegnimento, se questa ha una resistenza pari ad $R = 10$ Ohm, risulta di 2×10^{-5} Joule;

la potenza dissipata per effetto Joule risulta

$$R \cdot i^2 = \frac{f.e.m.^2}{R}$$

che, nel tempo di spegnimento risulta in un'energia dissipata

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\infty dt\, R\cdot i^2 = \frac{1}{R}\left[\pi R_0^2\,\mu_0 \frac{n}{L_0}\,k\,I_0\right]^2 \int_0^\infty dt\, e^{-2kt} = \\ &= \frac{1}{R}\left[\pi R_0^2\,\mu_0 \frac{n}{L_0}\,k\,I_0\right]^2 \frac{1}{2k} = \left[\pi R_0^2\,|\mathbf{B}|\right]^2\,k\,\frac{1}{2R} \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} k &= \frac{2WR}{\left[\pi R_0^2\,|\mathbf{B}|\right]^2} = \frac{2\cdot 2\times 10^{-5}\,\mathrm{Joule}\cdot 10\,\mathrm{Ohm}}{\pi^2 (NC/1000)^4\,\mathrm{m}^4\cdot\left(\frac{0.1257}{NC}\right)^2\,\mathrm{Tesla}^2} \\ &\approx \frac{2.565\times 10^9}{(NC)^2}\,\mathrm{sec}^{-1}\,. \end{aligned}$$

$\tau = k^{-1} \approx 3.9\times 10^{-10}\,(NC)^2$ *sec rappresenta un tempo caratteristico di spegnimento.*

Cosa cambierebbe se la spira esterna, pur restando perpendicolare all'asse del solenoide, non fosse concentrica con esso?

Il parametro fondamentale resta il flusso concatenato tra solenoide e spira che non varierebbe finché spira e solenoide restano perpendicolari (in caso contrario il flusso dipenderebbe dall'angolo tra i due). Dunque la fisica ed i valori numerici restano gli stessi.

3.) *In uno spettro di emissione l'itensità della radiazione emessa viene riportata in un grafico in funzione di $r = 1/\lambda$, ovvero l'inverso della lunghezza d'onda. La distanza tra due picchi risulta di $\Delta r = NM/10$ cm^{-1}, quanto vale la differenza di energia tra i livelli delle molecole che emettono la radiazione?*

La differenza di energia è proporzionale alla differenza di frequenze tra le due radiazioni

$$\Delta E = h\Delta\nu = h\Delta\left(\frac{c}{\lambda}\right) = hc\left(\Delta\frac{1}{\lambda}\right) = hc\,\Delta r\,,$$

dove h è la costante di Planck e c la velocità della luce nel vuoto. Si conclude

$$\begin{aligned} \Delta E &= hc\,\Delta r \approx 6.626\times 10^{-34}\,\mathrm{Joule}\cdot\mathrm{sec}\cdot 2.998\times 10^{10}\,\mathrm{cm/sec}\cdot\frac{NM}{10}\,\mathrm{cm}^{-1} \\ &\approx 1.9865\times 10^{-24}\,NM\,\mathrm{Joule} \approx 1.2400\times 10^{-5}\,NM\,\mathrm{eV} = \\ &\approx 0.186\,\mathrm{eV} \qquad \mathrm{se\,NM} = 15000\,. \end{aligned} \tag{4}$$

4.) *L'energia di legame dei due atomi che formano la molecola di idrogeno è tale che occorrono 110 kcal/mole per ridurre l'idrogeno ad idrogeno monoatomico. Si hanno a disposizione NC moli. Quale massima lunghezza d'onda deve avere la radiazione in grado di separarli?*

Se per separare una mole di molecole, ovvero N_A molecole, in componenti atomici occorrono $W = 110$ kcal, per separare gli atomi di una singola molecola basteranno

$$W/N_A = 110\,\mathrm{kcal}/N_A = 110 \cdot 10^3 \cdot 4.1868/N_A\mathrm{Joule} \approx 7.65 \times 10^{-19}\,\mathrm{Joule} \approx 4.78\,\mathrm{eV}\,.$$

Per separarli la radiazione deve fornire almeno questa energia ovvero

$$W/N_A \leq h\nu = hc/\lambda$$

da cui

$$\lambda \leq \frac{hc}{W/N_A} \approx \frac{12.4\,10^3\mathrm{eV}\cdot\mathrm{\AA}}{4.78\,\mathrm{eV}} \approx 2594.1\,\AA = 259.41\,\mathrm{nm}\,.$$

Il risultato è evidentemente indipendente dal numero delle moli.

5.) *Ricordando che, in fisica quantistica, alle particelle con quantità di moto $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ è associata un'onda di lunghezza d'onda $\lambda = h/|\mathbf{p}|$, dove h è la costante di Planck, si prepari un esperimento da doppia fenditura in cui le fenditure sono separate da $4\,\mu m$. Gli elettroni incidono sulle fenditure dopo essere stati accelerati da una differenza di potenziale di 100 Volt. Trovare la distanza tra i primi due massimi su di uno schermo fluorescente posto a distanza $L = 2 \cdot NC$ metri.*

L'elettrone sottoposto alla differenza di potenziale di 100 Volt acquista un'energia cinetica $T_e = 100$ eV, dove $T_e = 1/2\, m_e \mathbf{v}^2 = \mathbf{p}^2/(2\, m_e)$

Seguendo il testo

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{h}{|\mathbf{p}|} = \frac{h}{\sqrt{2\,m_e T_e}} \approx \frac{hc}{\sqrt{2\,m_e c^2\, T_e}} = \\
&\approx \frac{12.4 \times 10^3\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{\AA}}{\sqrt{2 \cdot 0.51 \times 10^6\,\mathrm{eV}\cdot 100\,\mathrm{eV}}} \approx 1.23\,\mathrm{\AA} = 1.23 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}\,.
\end{aligned}$$

I massimi si formano in corrispondenza di angoli dati dalla legge

$$d \sin\theta_n = n\,\lambda$$

con n=1,2,3.... si avrà:

$$\begin{aligned}
x_1 &= L\sin\theta_1 = 2\cdot NC\,\mathrm{m}\cdot\frac{1\cdot\lambda}{d} \approx 2\cdot NC\,\mathrm{m}\cdot\frac{1.23\times 10^{-10}\,\mathrm{m}}{4\times 10^{-6}\,\mathrm{m}} \approx NC\cdot 6.15\times 10^{-5}\,\mathrm{m} \\
x_2 &= L\sin\theta_2 = 2\cdot NC\,\mathrm{m}\cdot\frac{2\cdot\lambda}{d} \approx 2\cdot NC\,\mathrm{m}\cdot\frac{1.23\times 10^{-10}\,\mathrm{m}}{4\times 10^{-6}\,\mathrm{m}} \approx NC\cdot 12.3\times 10^{-5}\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

ovvero

$$x_2 - x_1 \approx NC\cdot 6.15\times 10^{-5}\,\mathrm{m} = NC\cdot 61.5\,\mu\mathrm{m} \approx 0.25\,\mathrm{mm}\ \ \mathrm{per}\, NC = 4\,.$$