

# Fisica 2 per biotecnologie: Prova Scritta 9 Giugno 2011

Scrivere immediatamente, ED IN EVIDENZA, sui due fogli protocollo consegnati (ed eventuali altri fogli richiesti) NOME COGNOME e MATRICOLA sulla sinistra, TESTO A (o B) sulla destra. Se si sceglie di svolgere SOLO la seconda parte perché in possesso di esito positivo della prova dell'11 Aprile scorso, scrivere, nella riga successiva, in mezzo: PARTE SECONDA

## Testo A

per superare la prova è necessario accumulare almeno 18 punti

**Parte Prima (per chi svolge la prova intera: tempo a disposizione 3 ore)**

1. Una membrana biologica ha una capacità specifica di  $10^{-2}$  Farad/m<sup>2</sup> ed una carica superficiale a riposo  $\sigma = 10^{-3}$  Coulomb/m<sup>2</sup>. Sapendo che la costante dielettrica relativa del tessuto vale  $\epsilon_r = K \approx 3$ ,
  - a) trovare lo spessore della membrana e la differenza di potenziale a cui è sottoposta;
  - b) supponendo che i canali di Na<sup>+</sup> siano  $50 \times 10^{12}$ /m<sup>2</sup> e che attraverso essi fluiscano 1000 ioni Na<sup>+</sup> in  $10^{-3}$  sec, trovare il valore a cui si riduce  $\sigma$  e la differenza di potenziale, dopo tale tempo (supporre che solo il 10% dei canali si attivino). (**punti 6**)
2. Due lunghi fili paralleli sono percorsi da una corrente di 2 Ampere ciascuno; la distanza tra loro vale 10 cm. Trovare valore assoluto, direzione e verso del campo magnetico nei punti di mezzo tra i due fili, in due casi: a) le due correnti sono concordi; b) le due correnti sono discordi.

Determinare valore assoluto, verso e direzione della forza per unità di lunghezza che si esercita su di un terzo filo percorso da una corrente  $i = 0.1$  A, posto in mezzo ai due fili e ad essi parallelo (la corrente che lo percorre sia concorde con le correnti del caso a)).

NB: per semplicità si fissi la direzione  $\hat{z}$  lungo il filo di mezzo e nel verso della corrente che lo percorre, mentre la direzione  $\hat{y}$  sia fissata in modo che i tre fili giacciono nel piano  $y, z$  che coincide col piano del foglio. Evidentemente l'asse  $\hat{x}$  sarà ortogonale al vostro foglio (con che verso?). (**punti 6**)

Fare un disegno che segua le indicazioni date e da cui emergano le quantità richieste.

3. Fare almeno gli esercizi n. **2.**, **3.**, **4.** della parte Seconda qui sotto.

**Parte Seconda (per chi deve integrare l'esito positivo della prova dell'11 Aprile: tempo a disposizione 3 ore)**

1. Una particella alfa (quindi di carica  $+2q_e$ ) viene fatta incidere su di un nucleo di oro (carica  $Zq_e = 79q_e$ ) secondo un urto testa - a - testa (urto centrale) così che essa raggiunge la distanza minima dal nucleo di oro:  $d_{minima} = 9.23 \times 10^{-15}$  m. Si determini:

a) quanto valeva l'energia cinetica della particella alfa quando (da enormi distanze rispetto alle dimensioni dell'oro) è stata lanciata verso il bersaglio (dare il risultato in elettron-Volt). (**punti 8**)

[suggerimenti: si può invocare la conservazione dell'energia? si assuma che l'oro, molto più massivo della particella alfa, resti in quiete durante l'urto.]

2. Quanti fotoni vengono emessi al secondo da una stazione trasmittente sulla frequenza  $f = 100$  MHz se la sua potenza vale 1000 Watt?

Quanto vale l'intensità della radiazione alla distanza di 100 m se la stazione emette in modo isotropo su tutto l'angolo solido? e l'ampiezza del campo elettrico associato all'onda elettromagnetica classica? (**punti 5**)

3. Lo spettro in energia del Sodio atomico mostra un doppietto di stati ad energie rispettivamente 2.105 eV e 2.103 eV rispetto allo stato fondamentale. Gli elettroni che da questo doppietto decadono nello stato fondamentale emettono fotoni di quale lunghezza d'onda?

Volendo rilevare queste due righe emesse (sul giallo) dal Sodio, si utilizza uno spettrofotometro con un reticolo di 600 fenditure per millimetro. Si determinino gli angoli a cui le due righe formano i primi massimi (che sono i più intensi) e la distanza dal reticolo a cui porre uno schermo se vi volessero osservare le due righe ad una distanza di 2.5 mm. (attenzione alle cifre significative!) (**punti 8**)

4. Luce rossa di lunghezza d'onda  $\lambda = 633$  nm o luce blu di 488 nm, viene fatta incidere su di un fotocatodo con lavoro di estrazione  $W_0 = 2.2$  eV.

Se incidono  $10^{12}$  fotoni al secondo sia nel caso di luce rossa che luce blu, quale corrente sarà rilevata nei due casi nell'ipotesi che il 100% dei fotoni sia in grado di estrarre un elettrone che viene raccolto dall'anodo?

Se l'intensità della luce (per entrambi i colori) viene aumentata di un fattore 10, cosa accadrà ?

Quale il valore del potenziale di arresto ( $V_A$  in Volt) in ognuno dei quattro casi descritti? (**punti 6**)

5. In una roccia, un certo elemento radioattivo con tempo di dimezzamento di 6.25 milioni di anni si scopre essere presente per solo il 25% della quantità originaria. Siamo in grado di stimare l'età della roccia senza calcolare logaritmi? (discutere il procedimento adottato). (**punti 4**)

---

Valori utili:

- valore della carica elementare  $q_e = 1.602 \times 10^{-19}$  Coulomb.
- costante di Planck  $h = 6.626 \times 10^{-34}$  Joule  $\cdot$  sec
- $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k_e \approx (2.998)^2 \times 10^9$  N $\cdot$ m<sup>2</sup> / C<sup>2</sup>;  $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$  Tesla  $\cdot$  m/Ampere

# Fisica 2 per biotecnologie: Prova Scritta 9 Giugno 2011

Scrivere immediatamente, ED IN EVIDENZA, sui due fogli protocollo consegnati (ed eventuali altri fogli richiesti) NOME COGNOME e MATRICOLA sulla sinistra, TESTO A (o B) sulla destra. Se si sceglie di svolgere SOLO la seconda parte perché in possesso di esito positivo della prova dell'11 Aprile scorso, scrivere, nella riga successiva, in mezzo: PARTE SECONDA

## Testo B

per superare la prova è necessario accumulare almeno 18 punti

Parte Prima (per chi svolge la prova intera: tempo a disposizione 3 ore)

1. In  $10^{-4} \text{ m}^2$  di membrana muscolare con una densità di canali di sodio di  $5 \times 10^{12}/\text{m}^2$ , si è stabilita una differenza di potenziale di 100 mV. Sapendo che la capacità specifica è di  $10^{-2} \text{ Farad}/\text{m}^2$  e che tutti i canali sono attivi in modo da far fluire 1000 ioni  $\text{Na}^+$ , dopo tale flusso di ioni a quale valore si riduce la carica superficiale? e la differenza di potenziale? se il processo impiega 1 msec, quanto vale la densità di corrente media per  $\text{m}^2$ ? (**punti 6**)

2. Due lunghi fili paralleli sono percorsi da una corrente di 4 Ampere ciascuno; la distanza tra loro vale 20 cm. Trovare valore assoluto, direzione e verso del campo magnetico nei punti di mezzo tra i due fili, in due casi: a) le due correnti sono concordi; b) le due correnti sono discordi.

Determinare valore assoluto, verso e direzione della forza per unità di lunghezza che si esercita su di un terzo filo percorso da una corrente  $i = 0.2 \text{ A}$ , posto in mezzo ai due fili e ad essi parallelo (la corrente che lo percorre sia concorde con le correnti del caso a)).

NB: per semplicità si fissi la direzione  $\hat{z}$  lungo il filo di mezzo e nel verso della corrente che lo percorre, mentre la direzione  $\hat{y}$  sia fissata in modo che i tre fili giacciono nel piano  $y, z$  che coincide col piano del foglio. Evidentemente l'asse  $\hat{x}$  sarà ortogonale al vostro foglio (con che verso?). (**punti 6**)

Fare un disegno che segua le indicazioni date e da cui emergano le quantità richieste.

3. Fare esercizi n. 2., 3., 4. della parte Seconda qui sotto.

Parte Seconda (per chi deve integrare l'esito positivo della prova dell'11 Aprile: tempo a disposizione 3 ore)

1. In un acceleratore, una particella alfa (quindi di carica  $+2q_e$ ) viene accelerata fino a possedere un'energia cinetica di 3.3 MeV. A che distanza (minima) si porterà in un urto testa - a testa (urto centrale) con un nucleo d'oro (carica  $Zq_e = 79q_e$ )? (**punti 8**)

[suggerimenti: si può invocare la conservazione dell'energia? si assuma che l'oro, molto più massivo della particella alfa, resti in quiete durante l'urto.]

2. Quanti fotoni vengono emessi al secondo da una stazione trasmittente sulla frequenza  $f = 200$  MHz se la sua potenza vale 2000 Watt?

Quanto vale l'intensità della radiazione alla distanza di 150 m se la stazione emette in modo isotropo su tutto l'angolo solido? e l'ampiezza del campo elettrico associato all'onda elettromagnetica classica? (**punti 5**)

3. Lo spettro di emissione del Rubidio atomico mostra un doppietto a lunghezze d'onda rispettivamente 7948 Å e 7800 Å. Nello spettro energetico del Rubidio a che stati corrispondono (in eV) sapendo che i fotoni emessi sono dovuti dalla diseccitazione di elettroni che passano allo stato fondamentale?

Volendo rilevare queste due righe emesse dal Rubidio, si utilizza uno spettrofotometro con un reticolo di 600 fenditure per millimetro. Si determinino gli angoli a cui le due righe formano i primi massimi (che sono i più intensi) e la distanza dal reticolo a cui porre uno schermo se vi volessero osservare le due righe ad una distanza di 2.5 mm. (attenzione alle cifre significative!) (**punti 8**)

4. Luce rossa di lunghezza d'onda  $\lambda = 633$  nm o luce blu di 488 nm, viene fatta incidere su di un fotocatodo con lavoro di estrazione  $W_0 = 2.4$  eV.

Se incidono  $10^{14}$  fotoni al secondo sia nel caso di luce rossa che luce blu, quale corrente sarà rilevata nei due casi nell'ipotesi che il 100% dei fotoni sia in grado di estrarre un elettrone che viene raccolto dall'anodo?

Se l'intensità della luce (per entrambi i colori) viene aumentata di un fattore 10, cosa accadrà ?

Quale il valore del potenziale di arresto ( $V_A$  in Volt) in ognuno dei quattro casi descritti? (**punti 6**)

5. In un campione, il  $^{14}\text{C}$  (tempo di dimezzamento 5730 anni) si scopre essere presente solo per il 12.5% della quantità originaria; siamo in grado di stimare l'età del campione senza calcolare logaritmi? (discutere il procedimento adottato). (**punti 4**)

---

Valori utili:

- valore della carica elementare  $q_e = 1.602 \times 10^{-19}$  Coulomb.
- costante di Planck  $h = 6.626 \times 10^{-34}$  Joule  $\cdot$  sec
- $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k_e \approx (2.998)^2 \times 10^9$  N $\cdot$ m<sup>2</sup> / C<sup>2</sup>;  $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$  Tesla  $\cdot$  m/Ampere

**Fisica 2 per biotecnologie**  
**Prova scritta: 9 Giugno 2011**  
**Soluzione Testo A**

per superare la prova è necessario accumulare almeno 18 punti

1. Una membrana biologica ha una capacità specifica di  $10^{-2}$  Farad/m<sup>2</sup> ed una carica superficiale a riposo  $\sigma = 10^{-3}$  Coulomb/m<sup>2</sup>. Sapendo che la costante dielettrica relativa del tessuto vale  $\epsilon_r = K \approx 3$ ,

- a) trovare lo spessore della membrana e la differenza di potenziale a cui è sottoposta; Per  $1 \text{ m}^2 = A$  di superficie della membrana la capacità vale ( $d$  è proprio lo spessore della membrana)

$$C = K\epsilon_0 \frac{A}{d} = 10^{-2} \text{ Farad},$$

quindi

$$d = K\epsilon_0 \frac{A}{C} = 3 \cdot 8.85 \times 10^{-12} \text{ Farad/m} \cdot \frac{1 \text{ m}^2}{10^{-2} \text{ Farad}} \approx 2.66 \text{ nm}.$$

La differenza di potenziale vale

$$V = E \cdot d = \frac{\sigma}{K\epsilon_0} \cdot d = \frac{10^{-3} \text{ Coulomb/m}^2}{3 \cdot 8.85 \times 10^{-12} \text{ Farad/m}} \cdot 2.66 \times 10^{-9} \text{ m} \approx 0.1 \text{ Volt}.$$

oppure

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{\sigma \cdot A}{K\epsilon_0 A/d} = \frac{\sigma}{K\epsilon_0} \cdot d \approx 0.1 \text{ Volt}.$$

- b) supponendo che i canali di  $\text{Na}^+$  siano  $50 \times 10^{12}/\text{m}^2$  e che attraverso essi fluiscano 1000 ioni  $\text{Na}^+$  in  $10^{-3}$  sec, trovare il valore a cui si riduce  $\sigma$  e la differenza di potenziale, dopo tale tempo (supporre che solo il 10% dei canali si attivino).

Ogni canale trasporta (in 1 msec) una carica  $Q_{\text{Na}} = 1000 q_e = 1000 \cdot 1.602 \times 10^{-19} \text{ Coulomb} = 1.602 \times 10^{-16} \text{ Coulomb}$ , mentre in un metro quadro di membrana solo  $50 \times 10^{12}/10 = 50 \times 10^{11}$  canali sono attivi. Ne risulta che in  $1 \text{ m}^2$ , in 1 msec,  $50 \times 10^{11} \cdot 1.602 \times 10^{-16} \text{ Coulomb} = 0.8 \times 10^{-3} \text{ Coulomb}$  vengono rimossi e la carica superficiale si riduce a

$$\sigma' = 0.2 \times 10^{-3} \text{ Coulomb/m}^2.$$

Il potenziale viene ridotto dello stesso rapporto essendo proporzionale a  $\sigma$ , perciò

$$V' = V \frac{\sigma'}{\sigma} = 0.02 \text{ Volt}.$$

2. Due lunghi fili paralleli sono percorsi da una corrente di 2 Ampere ciascuno; la distanza tra loro vale 10 cm. Trovare valore assoluto, direzione e verso del campo magnetico nei punti di mezzo tra i due fili, in due casi: a) le due correnti sono concordi; b) le due correnti sono discordi.

NB: per semplicità si fissi la direzione  $\hat{z}$  lungo il filo di mezzo e nel verso della corrente che lo percorre, mentre la direzione  $\hat{y}$  sia fissata in modo che i tre fili giacciono nel piano  $y, z$  che coincide col piano del foglio. Evidentemente l'asse  $\hat{x}$  sarà ortogonale al vostro foglio (è necessario fissare un sistema destrorso per poter applicare a regola della mano destra...).

a) correnti concordi nel verso  $\hat{z}$ : i due campi magnetici circolano intorno ai fili e nel punto di mezzo hanno valori assoluti uguali, visto che le correnti che li producono sono identiche e le distanze dai fili le stesse:

$$|\vec{B}_1| = |\vec{B}_2| = B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{d/2} = 10^{-7} \text{ Tesla} \cdot \text{m/Ampere} \cdot \frac{2 \cdot 2 \text{ Ampere}}{5 \times 10^{-2} \text{ m}} \approx 8.0 \times 10^{-6} \text{ Tesla},$$

ma versi discordi, ne segue che  $\vec{B}_{\text{totale}} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = -|\vec{B}_1| \hat{x} + |\vec{B}_2| \hat{x} = \hat{x}(|\vec{B}_2| - |\vec{B}_1|) = 0$ .

b) correnti discordi:  $I_1$  lungo  $\hat{z}$ ,  $I_2$  lungo  $-\hat{z}$ , quindi

$$\vec{B}_{\text{totale}} = -\hat{x}|\vec{B}_1| - \hat{x}|\vec{B}_2| = -\hat{x} 2B = -\hat{x} 16.0 \times 10^{-6} \text{ Tesla}.$$

Determinare valore assoluto, verso e direzione della forza che si esercita su di un terzo filo percorso da una corrente  $i = 0.1 \text{ A}$ , posto in mezzo ai due fili e ad essi parallelo (la corrente che lo percorre sia concorde con le correnti del caso a)).

La corrente del filo interno, nel nostro caso, circolerà lungo  $\hat{z}$ . Quando le altre correnti sono concordi con tale verso (caso a)) la forza che si esercita sul filo centrale è nulla perché nullo è il campo magnetico risultante dei due fili, mentre nel caso b), si avrà una forza per unità di lunghezza tale che

$$d\vec{F} = \vec{i} \times \vec{B}_{\text{totale}} dz = \hat{z} \times (-\hat{x}) i |\vec{B}_{\text{totale}}| dz = -\hat{y} i 2B dz = -\hat{y} 1.6 \times 10^{-6} \text{ Newton/m} dz.$$

La forza per unità di lunghezze vale dunque  $|d\vec{F}/dz| = 1.6 \times 10^{-6} \text{ Newton/m}$  in modulo, ed è diretta lungo  $-\hat{y}$ .

## Parte Seconda (per chi deve integrare l'esito positivo della prova dell'11 Aprile: tempo a disposizione 3 ore)

1. Una particella alfa (quindi di carica  $+2q_e$ ) viene fatta incidere su di un nucleo di oro (carica  $Zq_e = 79q_e$ ) secondo un urto testa - a - testa (urto centrale) così che essa raggiunge la distanza minima dal nucleo di oro  $d_{\text{minima}} = 9.23 \times 10^{-15} \text{ m}$ . Si determini:

[suggerimenti: si può invocare la conservazione dell'energia? si assuma che l'oro, molto più massivo della particella alfa, resti in quiete durante l'urto.]

a) Quanto valeva l'energia cinetica della particella alfa quando (da enormi distanze rispetto alle dimensioni dell'oro) è stata lanciata verso il bersaglio (dare il risultato in elettron-Volt).

La particella alfa si avvicina al nucleo di oro subendo la forza elettrica che il nucleo produce su di essa, forza dovuta alle cariche elettriche e quindi conservativa: vale la conservazione dell'energia che da cinetica si trasforma in potenziale quando la particella alfa giunge alla distanza minima in cui la velocità si annulla. Vale dunque

$$\begin{aligned} (E_{cinetica} + E_{potenziale})|_{iniziale} &= (E_{cinetica} + E_{potenziale})|_{finale} \\ (E_{cinetica} + zero)|_{iniziale} &= (zero + E_{potenziale})|_{finale} \\ E_{cinetica}|_{iniziale} &= k_e \frac{(+2 q_e) \cdot (Z q_e)}{d_{minima}} \end{aligned}$$

da cui

$$E_{cinetica}|_{iniziale} \approx (k_e q_e^2) \frac{2 \cdot 79}{9.23 \cdot 10^{-5} \text{ \AA}} = 14.4 \text{ eV \AA} \frac{2 \cdot 79}{9.23 \cdot 10^{-5} \text{ \AA}} \approx 24.7 \times 10^6 \text{ eV}.$$

2. Quanti fotoni vengono emessi al secondo da una stazione trasmittente sulla frequenza  $f = 100 \text{ MHz}$  se la sua potenza vale  $1000 \text{ Watt}$ ?

L'energia del singolo fotone emesso vale

$$E = hf = 6.626 \times 10^{-34} \text{ Joule} \cdot \text{sec} \cdot 100 \times 10^6 \text{ sec}^{-1} = 6.626 \times 10^{-26} \text{ Joule} \approx 4.2 \times 10^{-7} \text{ eV}.$$

Ne verranno emessi  $N$  al secondo da uguagliare la potenza  $P = 1000 \text{ Watt}$ , della stazione, ovvero  $P = N hf$ , da cui

$$N = \frac{P}{hf} = \frac{1000 \text{ Watt}}{6.626 \times 10^{-26} \text{ Joule}} \approx 1.51 \times 10^{28} \text{ fotoni al secondo}.$$

Quanto vale l'intensità della radiazione alla distanza di  $100 \text{ m}$  se la stazione emette in modo isotropo su tutto l'angolo solido? e l'ampiezza del campo elettrico associato all'onda elettromagnetica classica?

L'intensità  $I$  è data dalla potenza di  $1000 \text{ Watt}$  irraggiata tutta una superficie sferica di raggio  $R = 100 \text{ m}$ , nell'ipotesi di uniforme distribuzione su tutto l'angolo solido (isotropia), si ha

$$I = \frac{P}{4\pi R^2} = \frac{1000 \text{ W}}{4\pi 100^2 \text{ m}^2} \approx 8.0 \times 10^{-3} \text{ Watt/m}^2,$$

corrispondenti a  $\mathcal{N} = I/(hf) = 1.21 \times 10^{23} \text{ fotoni al secondo /m}^2$ .

L'ampiezza massima  $E_0$  del campo elettrico  $E$  associato all'onda si può determinare calcolando l'intensità per mezzo della sua relazione col campo elettrico medio ( $\langle E^2 \rangle = \bar{E}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T E_0^2 \cos^2(\omega t) dt = E_0^2/2$ );

$$I = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 = 8.0 \times 10^{-3} \text{ Watt/m}^2,$$

risulta

$$E_0 = \sqrt{\frac{2I}{\epsilon_0 c}} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot 8.0 \times 10^{-3} \text{ Watt/m}^2}{8.84 \times 10^{-12} \text{ Farad/m} \cdot 3 \times 10^8 \text{ m/sec}}} \approx 2.46 \text{ Volt/m}.$$

3. Lo spettro in energia del Sodio atomico mostra un doppietto di stati ad energie rispettivamente 2.105 eV e 2.103 eV rispetto alla stato fondamentale. Gli elettroni che da questo doppietto decadono nello stato fondamentale emettono fotoni di quale lunghezza d'onda?

$$hf_1 = \frac{hc}{\lambda_1} = \Delta E_1 = 2.105 \text{ eV}$$

$$hf_2 = \frac{hc}{\lambda_2} = \Delta E_2 = 2.103 \text{ eV},$$

ovvero

$$\lambda_1 = \frac{hc}{\Delta E_1} = \frac{12.4 \times 10^3 \text{ eV \AA}}{2.105 \text{ eV}} \approx 5891 \text{ \AA}$$

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\Delta E_2} = \frac{12.4 \times 10^3 \text{ eV \AA}}{2.103 \text{ eV}} \approx 5896 \text{ \AA},$$

Volendo rilevare queste due righe emesse dal Sodio, si utilizza uno spettrofotometro con un reticolo di 600 fenditure per millimetro. Si determinino gli angoli (in gradi e radianti) a cui le due righe formano i primi massimi (che sono i più intensi) e la distanza dal reticolo a cui porre uno schermo se vi volessero osservare le due righe ad una distanza di 2.5 mm (attenzione alle cifre significative!)

Valendo la relazione

$$d \sin \vartheta = n \lambda$$

dove  $d = 1\text{mm}/600 = 1.6667 \times 10^{-3} \text{ mm} = 1.6667 \times 10^{-6} \text{ m}$  otteniamo, per il primo massimo ( $n = 1$ )

$$\sin \vartheta_1 = \frac{\lambda_1}{d} = \frac{5891 \times 10^{-10} \text{ m}}{1.6667 \times 10^{-6} \text{ m}} \approx 0.3535 \rightarrow \vartheta_1 \approx 20.699^\circ = \frac{20.699^\circ \cdot \pi}{180^\circ} \approx 0.3613 \text{ rad};$$

$$\sin \vartheta_2 = \frac{\lambda_2}{d} = \frac{5896 \times 10^{-10} \text{ m}}{1.6667 \times 10^{-6} \text{ m}} \approx 0.3538 \rightarrow \vartheta_2 \approx 20.717^\circ = \frac{20.717^\circ \cdot \pi}{180^\circ} \approx 0.3616 \text{ rad}.$$



Sullo schermo a distanza  $R$  le due righe appariranno separate da una distanza che pretendiamo essere fissata a  $D = 2.5 \text{ mm}$ :

$$D = R \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1) \quad \rightarrow \quad R = \frac{D}{(\vartheta_2 - \vartheta_1)} = \frac{2.5 \times 10^{-3} \text{ m}}{(0.3616 - 0.3613)} \approx 8.3 \text{ m}.$$

4. Luce rossa di lunghezza d'onda  $\lambda = 633 \text{ nm}$  o luce blu di  $488 \text{ nm}$ , viene fatta incidere su di un fotocatodo con lavoro di estrazione  $W_0 = 2.2 \text{ eV}$ .

Se incidono  $10^{12}$  fotoni al secondo, sia nel caso di luce rossa che luce blu, quale corrente sarà rilevata nei due casi nell'ipotesi che il 100% dei fotoni sia in grado di estrarre un elettrone che viene raccolto dall'anodo?

Le energie dei fotoni incidenti sono

$$hf_{rossa} = \frac{hc}{\lambda_{rossa}} = \frac{12.4 \times 10^3 \text{ eV } \text{\AA}}{6330 \text{ \AA}} \approx 1.96 \text{ eV} < W_0;$$

$$hf_{blu} = \frac{hc}{\lambda_{blu}} = \frac{12.4 \times 10^3 \text{ eV } \text{\AA}}{4880 \text{ \AA}} \approx 2.54 \text{ eV} > W_0.$$

Quindi SOLO la luce blu è in grado di produrre l'effetto fotoelettrico essendo  $hf_{blu} > W_0$ .

Date le ipotesi, il numero di elettroni estratti e raccolti al secondo ( $dN_e/dt$ ) è pari al numero di fotoni blu incidenti nello stesso lasso di tempo ( $dN_\gamma/dt$ ), quindi la corrente elettrica sarà quella determinata da questi elettroni

$$i = \frac{dQ}{dt} = q_e \frac{dN_e}{dt} = q_e \frac{dN_\gamma}{dt} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ Coulomb} \cdot 10^{12} \text{ sec}^{-1} =$$

$$\approx 1.6 \times 10^{-7} \text{ Ampere} = 0.16 \mu\text{Ampere}.$$

Se l'intensità della luce (per entrambi i colori) viene aumentata di un fattore 10, cosa accadrà ?

Il numero di fotoni incidenti aumenta di un fattore 10, quindi il numero di elettroni estratti al secondo dal fascio di luce blu e quindi la corrente circolate in questo caso, aumentano dello stesso fattore. La luce rossa non produrrà l'estrazione di alcun elettrone. malgrado l'aumento di intensità, la frequenza resta sotto soglia.

Quale risulta il potenziale di arresto ( $V_A$  in Volt) in ognuno dei quattro casi descritti?

Il potenziale di arresto ( $V_A$ ) corrisponde all'energia cinetica degli elettroni estratti, essendo il minimo valore di potenziale in grado di fare un lavoro sugli elettroni ( $q_e V_A$ ) pari alla loro energia cinetica. Ha quindi senso di parlare di potenziale di arresto SOLO nel caso di luce blu. Vale la:

$$q_e \cdot V_A = \frac{1}{2} m_e \vec{v}^2 = hf_{blu} - W_0,$$

quindi

$$V_A = \frac{hf_{blu} - W_0}{q_e} = \frac{(2.54 \text{ eV} - 2.2 \text{ eV}) \cdot 1.602 \times 10^{-19} \text{ Joule/eV}}{1.602 \times 10^{-19} \text{ Coulomb}} \approx 0.34 \text{ Volt}.$$

Il potenziale di arresto NON dipende dall'intensità dei fotoni incidenti, ma solo dalla loro frequenza, quindi nel caso di aumento di un fattore 10 dell'intensità della luce blu,  $V_A$  varrà sempre 0.34 Volt.

5. In una roccia, un certo elemento radioattivo con tempo di dimezzamento di 6.25 milioni di anni si scopre essere solo il 25% della quantità originaria, siamo in grado di stimare l'età della roccia senza calcolare logaritmi? (discutere il procedimento adottato).

Evidentemente lo strumento da usare deve risiedere nell'unico indizio fornito: il di tempo di dimezzamento. Dopo tale tempo, infatti, la quantità di elemento originario è dimezzato, ne segue che perché ne resti il 25% deve essere trascorso un tempo pari a due tempi di dimezzamento, ovvero l'età del campione deve essere circa  $6.25 \cdot 2 = 12.5$  milioni di anni.

**Fisica 2 per biotecnologie**  
**Prova scritta: 9 Giugno 2011**  
**Soluzione Testo B**

per superare la prova è necessario accumulare almeno 18 punti

1. In  $10^{-4} \text{ m}^2$  di membrana muscolare con una densità di canali di Sodio di  $5 \times 10^{12}/\text{m}^2$ , si è stabilita una differenza di potenziale di 100 mV. Sapendo che la capacità specifica è di  $10^{-2} \text{ Farad}/\text{m}^2$  e che tutti i canali sono attivi in modo da far fluire 1000 ioni  $\text{Na}^+$ , dopo tale flusso di ioni

- a) a quale valore si riduce la carica superficiale? e la differenza di potenziale?

Per  $1 \text{ m}^2 = A$  di superficie della membrana la capacità vale ( $d$  è lo spessore della membrana)

$$C = K\epsilon_0 \frac{A}{d} = 10^{-2} \text{ Farad},$$

quindi

$$d = K\epsilon_0 \frac{A}{C} = 3 \cdot 8.85 \times 10^{-12} \text{ Farad}/\text{m} \cdot \frac{1 \text{ m}^2}{10^{-2} \text{ Farad}} \approx 2.66 \text{ nm}.$$

Inoltre

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{\sigma \cdot A}{K\epsilon_0 A/d} = \frac{\sigma}{K\epsilon_0} \cdot d = 100 \text{ mVolt}.$$

quindi

$$\sigma = V \cdot \frac{K\epsilon_0}{d} = 10^{-1} \text{ Volt} \cdot \frac{3 \cdot 8.85 \times 10^{-12} \text{ Farad}/\text{m}}{2.66 \times 10^{-9} \text{ m}} \approx 1 \times 10^{-3} \text{ Coulomb}/\text{m}^2,$$

ovvero  $Q = \sigma \cdot A = 1 \times 10^{-3} \text{ Coulomb}/\text{m}^2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 1 \times 10^{-7} \text{ Coulomb}$ , prima del flusso di ioni.

La carica che fluisce attraverso i  $5 \times 10^{12} \text{ canali}/\text{m}^2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 5 \times 10^8$  canali della membrana, vale

$$Q_{\text{Na}} = 1000 \cdot q_e \cdot 5 \times 10^8 \approx 8.0 \times 10^{-8} \text{ Coulomb};$$

la corrente media

$$i_{\text{Na}} = \frac{Q_{\text{Na}}}{10^{-3} \text{ sec}} \approx \frac{8.0 \times 10^{-8} \text{ Coulomb}}{10^{-3} \text{ sec}} \approx 8.0 \times 10^{-5} \text{ Ampere};$$

e la carica che resta risulta  $Q' = Q - Q_{\text{Na}} = 0.2 \times 10^{-7} \text{ Coulomb}$ , ovvero  $\sigma' = 0.2 \times 10^{-3} \text{ Coulomb}/\text{m}^2$ .

b) se il processo impiega 1 msec, quanto vale la densità di corrente media (per  $m^2$ )?

$$j_{Na} = \frac{i_{Na}}{10^{-4} m^2} \approx 0.8 \text{ Ampere}/m^2.$$

2. Due lunghi fili paralleli sono percorsi da una corrente di 4 Ampere ciascuno; la distanza tra loro vale 20 cm. Trovare valore assoluto, direzione e verso del campo magnetico nei punti di mezzo tra i due fili, in due casi: a) le due correnti sono concordi; b) le due correnti sono discordi.

NB: per semplicità si fissi la direzione  $\hat{z}$  lungo il filo di mezzo e nel verso della corrente che lo percorre, mentre la direzione  $\hat{y}$  sia fissata in modo che i tre fili giacciono nel piano  $y, z$  che coincide col piano del foglio. Evidentemente l'asse  $\hat{x}$  sarà ortogonale al vostro foglio (è necessario fissare un sistema destrorso per poter applicare a regola della mano destra...).

a) correnti concordi nel verso  $\hat{z}$ : i due campi magnetici circolano intorno ai fili e nel punto di mezzo hanno valori assoluti uguali, visto che le correnti che li producono sono identiche e le distanze dai fili le stesse:

$$|\vec{B}_1| = |\vec{B}_2| = B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{d/2} = 10^{-7} \text{ Tesla} \cdot m/\text{Ampere} \cdot \frac{2 \cdot 4 \text{ Ampere}}{10 \times 10^{-2} m} \approx 8.0 \times 10^{-6} \text{ Tesla},$$

ma versi discordi, ne segue che  $\vec{B}_{\text{totale}} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = -|\vec{B}_1| \hat{x} + |\vec{B}_2| \hat{x} = \hat{x}(|\vec{B}_2| - |\vec{B}_1|) = 0$ .

b) correnti discordi:  $I_1$  lungo  $\hat{z}$ ,  $I_2$  lungo  $-\hat{z}$ , quindi

$$\vec{B}_{\text{totale}} = -\hat{x}|\vec{B}_1| - \hat{x}|\vec{B}_2| = -\hat{x} 2B = -\hat{x} 16.0 \times 10^{-6} \text{ Tesla}.$$

Determinare valore assoluto, verso e direzione della forza per unità di lunghezza che si esercita su di un terzo filo percorso da una corrente  $i = 0.2$  A, posto in mezzo ai due fili e ad essi parallelo (la corrente che lo percorre sia concorde con le correnti del caso a)).

La corrente del filo interno, nel nostro caso, circolerà lungo  $\hat{z}$ . Quando le altre correnti sono concordi con tale verso (caso a)) la forza che si esercita sul filo centrale è nulla perché nullo è il campo magnetico risultante dei due fili, mentre nel caso b), si avrà una forza per unità di lunghezza tale che

$$d\vec{F} = \vec{i} \times \vec{B}_{\text{totale}} dz = \hat{z} \times (-\hat{x}) i |\vec{B}_{\text{totale}}| dz = -\hat{y} i 2B dz = -\hat{y} 3.2 \times 10^{-6} \text{ Newton}/m dz.$$

La forza per unità di lunghezze vale dunque  $|d\vec{F}/dz| = 3.2 \times 10^{-6} \text{ Newton}/m$  in modulo, ed è diretta lungo  $-\hat{y}$ .

**Parte Seconda (per chi deve integrare l'esito positivo della prova dell'11 Aprile: tempo a disposizione 3 ore)**

1. In un acceleratore, una particella alfa (quindi di carica  $+2q_e$ ) viene accelerata fino a possedere un'energia cinetica di 3.3 MeV.

[suggerimenti: si può invocare la conservazione dell'energia? si assuma che l'oro, molto più massivo della particella alfa, resti in quiete durante l'urto.]

A che distanza si porterà in un urto testa - a testa (urto centrale) con un nucleo d'oro (carica  $Zq_e = 79q_e$ )?

La particella alfa si avvicina al nucleo di oro subendo la forza elettrica che il nucleo produce su di essa, forza dovuta alle cariche elettriche e quindi conservativa: vale la conservazione dell'energia che da cinetica si trasforma in potenziale quando la particella alfa giunge alla distanza minima in cui la velocità si annulla. Vale dunque

$$\begin{aligned} (E_{cinetica} + E_{potenziale})|_{iniziale} &= (E_{cinetica} + E_{potenziale})|_{finale} \\ (E_{cinetica} + zero)|_{iniziale} &= (zero + E_{potenziale})|_{finale} \\ E_{cinetica}|_{iniziale} &= k_e \frac{(+2q_e) \cdot (Zq_e)}{d_{minima}} \end{aligned}$$

da cui

$$d_{minima} = (k_e q_e^2) \frac{2 \cdot 79}{E_{cinetica}|_{iniziale}} \approx 14.4 \text{ eV} \text{ \AA} \frac{2 \cdot 79}{3.3 \cdot 10^6 \text{ eV}} \approx 68.9 \times 10^{-15} \text{ m} = 68.9 \text{ fm}.$$

2. Quanti fotoni vengono emessi al secondo da una stazione trasmittente sulla frequenza  $f = 200 \text{ MHz}$  se la sua potenza vale 2000 Watt?

L'energia del singolo fotone emesso vale

$$E = hf = 6.626 \times 10^{-34} \text{ Joule} \cdot \text{sec} \cdot 200 \times 10^6 \text{ sec}^{-1} \approx 13.25 \times 10^{-26} \text{ Joule} \approx 8.3 \times 10^{-7} \text{ eV}.$$

Ne verranno emessi  $N$  al secondo da uguagliare la potenza  $P = 2000 \text{ Watt}$ , della stazione, ovvero  $P = N hf$ , da cui

$$N = \frac{P}{hf} = \frac{2000 \text{ Watt}}{6.626 \times 10^{-26} \text{ Joule}} \approx 1.51 \times 10^{28} \text{ fotoni al secondo}.$$

Quanto vale l'intensità della radiazione alla distanza di 150 m se la stazione emette in modo isotropo su tutto l'angolo solido? e l'ampiezza del campo elettrico associato all'onda elettromagnetica classica?

L'intensità  $I$  è data dalla potenza di 2000 Watt irraggiata su tutta una superficie sferica di raggio  $R = 150 \text{ m}$ , nell'ipotesi di uniforme distribuzione su tutto l'angolo solido (isotropia), si ha

$$I = \frac{P}{4\pi R^2} = \frac{2000 \text{ W}}{4\pi 150^2 \text{ m}^2} \approx 7.1 \times 10^{-3} \text{ Watt/m}^2,$$

corrispondenti a  $\mathcal{N} = I/(hf) = 5.4 \times 10^{22}$  fotoni al secondo /m<sup>2</sup>.

L'ampiezza massima  $E_0$  del campo elettrico  $E$  associato all'onda si può determinare calcolando l'intensità per mezzo della sua relazione col campo elettrico medio ( $\langle E^2 \rangle = \bar{E}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T E_0^2 \cos^2(\omega t) dt = E_0^2/2$ );

$$I = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 = 7.1 \times 10^{-3} \text{ Watt/m}^2,$$

risulta

$$E_0 = \sqrt{\frac{2I}{\epsilon_0 c}} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot 7.1 \times 10^{-3} \text{ Watt/m}^2}{8.84 \times 10^{-12} \text{ Farad/m} \cdot 3 \times 10^8 \text{ m/sec}}} \approx 2.32 \text{ Volt/m}.$$

3. Lo spettro di emissione del Rubidio atomico mostra un doppietto a lunghezze d'onda rispettivamente  $\lambda_1 = 7948 \text{ \AA}$  e  $\lambda_2 = 7800 \text{ \AA}$ . Nello spettro energetico del Rubidio a che stati corrispondono (in eV) sapendo che sono dovuti dalla diseccitazione di elettroni che passano allo stato fondamentale?

Volendo rilevare queste due righe emesse dal Rubidio, si utilizza uno spettrofotometro con un reticolo di 600 fenditure per millimetro. Si determinino gli angoli a cui le due righe formano i primi massimi (che sono i più intensi) e la distanza dal reticolo a cui porre uno schermo se vi volessero osservare le due righe ad una distanza di 2.5 mm.

$$\begin{aligned} hf_1 &= \frac{hc}{\lambda_1} = \frac{12.4 \times 10^3 \text{ eV \AA}}{7948 \text{ \AA}} = \Delta E_1 \approx 1.560 \text{ eV}; \\ hf_2 &= \frac{hc}{\lambda_2} = \frac{12.4 \times 10^3 \text{ eV \AA}}{7800 \text{ \AA}} = \Delta E_1 \approx 1.590 \text{ eV}; \end{aligned} \tag{1}$$

ovvero

Volendo rilevare queste due righe emesse dal Rubidio, si utilizza uno spettrofotometro con un reticolo di 600 fenditure per millimetro. Si determinino gli angoli a cui le due righe formano i primi massimi (che sono i più intensi) e la distanza dal reticolo a cui porre uno schermo se vi volessero osservare le due righe ad una distanza di 2.5 mm. (attenzione alle cifre significative!)

Valendo la relazione

$$d \sin \vartheta = n \lambda$$

dove  $d = 1\text{mm}/600 = 1.6667 \times 10^{-3} \text{ mm} = 1.6667 \times 10^{-6} \text{ m}$  otteniamo, per il primo massimo ( $n = 1$ )

$$\begin{aligned} \sin \vartheta_1 &= \frac{\lambda_1}{d} = \frac{7948 \times 10^{-10} \text{ m}}{1.6667 \times 10^{-6} \text{ m}} \approx 0.4769 \rightarrow \vartheta_1 \approx 28.481 = \frac{28.481 \cdot \pi}{180} \approx 0.4971 \text{ rad}; \\ \sin \vartheta_2 &= \frac{\lambda_2}{d} = \frac{7800 \times 10^{-10} \text{ m}}{1.6667 \times 10^{-6} \text{ m}} \approx 0.4680 \rightarrow \vartheta_2 \approx 27.904 = \frac{27.904 \cdot \pi}{180} \approx 0.4870 \text{ rad}. \end{aligned}$$

Sullo schermo a distanza  $R$  le due righe appariranno separate da una distanza che pretendiamo essere fissata a  $D = 2.5 \text{ mm}$ :

$$D = R \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2) \quad \rightarrow \quad R = \frac{D}{(\vartheta_1 - \vartheta_2)} = \frac{2.5 \times 10^{-3} \text{ m}}{(0.4971 - 0.4870)} \approx 0.25 \text{ m}.$$

4. Luce rossa di lunghezza d'onda  $\lambda = 633 \text{ nm}$  o luce blu di  $488 \text{ nm}$ , viene fatta incidere su di un fotocatodo con lavoro di estrazione  $W_0 = 2.4 \text{ eV}$ .

Se incidono  $10^{14}$  fotoni al secondo, sia nel caso di luce rossa che luce blu, quale corrente sarà rilevata nei due casi nell'ipotesi che il 100% dei fotoni sia in grado di estrarre un elettrone che viene raccolto dall'anodo?

Le energie dei fotoni incidenti sono

$$hf_{rossa} = \frac{hc}{\lambda_{rossa}} = \frac{12.4 \times 10^3 \text{ eV } \text{\AA}}{6330 \text{ \AA}} \approx 1.96 \text{ eV} < W_0;$$

$$hf_{blu} = \frac{hc}{\lambda_{blu}} = \frac{12.4 \times 10^3 \text{ eV } \text{\AA}}{4880 \text{ \AA}} \approx 2.54 \text{ eV} > W_0.$$

Quindi SOLO la luce blu è in grado di produrre l'effetto fotoelettrico essendo  $hf_{blu} > W_0$ .

Date le ipotesi il numero di elettroni estratti e raccolti al secondo ( $dN_e/dt$ ) è pari al numero di fotoni blu incidenti nello stesso lasso di tempo ( $dN_\gamma/dt$ ), quindi la corrente elettrica sarà quella determinata da questi elettroni

$$i = \frac{dQ}{dt} = q_e \frac{dN_e}{dt} = q_e \frac{dN_\gamma}{dt} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ Coulomb} \cdot 10^{14} \text{ sec}^{-1} =$$

$$\approx 1.6 \times 10^{-5} \text{ Ampere} = 16 \mu\text{Ampere}.$$

Se l'intensità della luce (per entrambi i colori) viene aumentata di un fattore 10, cosa accadrà ?

Il numero di fotoni incidenti aumenta di un fattore 10, quindi il numero di elettroni estratti al secondo dal fascio di luce blu e quindi la corrente circolante in questo caso, aumentano dello stesso fattore. La luce rossa non produrrà l'estrazione di alcun elettrone: malgrado l'aumento di intensità, la frequenza resta sotto soglia.

Quale risulta il potenziale di arresto ( $V_A$  in Volt) in ognuno dei quattro casi descritti?

Il potenziale di arresto ( $V_A$ ) corrisponde all'energia cinetica degli elettroni estratti, essendo il minimo valore di potenziale in grado di fare un lavoro sugli elettroni ( $q_e V_A$ ) pari alla loro energia cinetica. Ha quindi senso di parlare di potenziale di arresto SOLO nel caso di luce blu. Vale la:

$$q_e \cdot V_A = \frac{1}{2} m_e \vec{v}^2 = hf_{blu} - W_0,$$

quindi

$$V_A = \frac{hf_{blu} - W_0}{q_e} = \frac{(2.54 \text{ eV} - 2.4 \text{ eV}) \cdot 1.602 \times 10^{-19} \text{ Joule/eV}}{1.602 \times 10^{-19} \text{ Coulomb}} \approx 0.14 \text{ Volt}.$$

Il potenziale di arresto NON dipende dall'intensità dei fotoni incidenti, ma solo dalla loro frequenza, quindi nel caso di aumento di un fattore 10 dell'intensità della luce blu  $V_A$  varrà sempre 0.14 Volt.

5. In un campione, il  $^{14}\text{C}$  (tempo di dimezzamento 5730 anni) si scopre essere solo il 12.5% della quantità originaria; siamo in grado di stimare l'età del campione senza calcolare logaritmi? (discutere il procedimento adottato).

Evidentemente lo strumento da usare deve risiedere nell'unico indizio fornito: il di tempo di dimezzamento. Dopo tale tempo, infatti, la quantità di elemento originario è dimezzato, ne segue che perché ne resti il 12.5% deve essere trascorso un tempo pari a tre tempi di dimezzamento, ovvero l'età del campione deve essere circa  $5730 \cdot 3 = 17190$  anni.