Fisica 2 per biotecnologie: Prova Scritta 13 Febbraio 2012

Scrivere immediatamente, <u>ED IN EVIDENZA</u>, sui due fogli protocollo consegnati (ed eventuali altri fogli richiesti) la seguente tabella:

NOME : .... Numero lettere del nome $NN =$ **.................**

COGNOME : .... Numero lettere del Cognome $NC =$ **.................**
NUMERO DI MATRICOLA : .... $= NM$
[esempio: Mario (NN = 5) Careri (NC = 6) matricola 12345 (NM = 12345)]

Testo unico

per superare la prova è necessario accumulare almeno 18 punti

(tempo a disposizione 2 ore e 30 minuti)

1.) Si consideri un circuito come in Figura 1, in cui R_L rappresenta una lampadina ad incandescenza di potenza $P_L = 2.5$ Watt e tensione $V_L = NC/2$ Volt. Il sistema è alimentato da una batteria da $V_0 = 3 \cdot NC/2$ Volt. Per alimentare la lampadina con la tensione e la potenza corrette quanto deve valere la resistenza R_0? **(4 punti)**

Si consideri poi il circuito di Figura 2 in cui, oltre agli elementi già discussi, è inserito un condensatore $C = 100\,\mu$F ed un interruttore. Descrivere quantitativamente la corrente nel circuito in funzione del tempo assumendo che all'istante $t = 0$ il circuito venga chiuso ed il condensatore sia inizialmente scarico. Discutere anche qualitativamente il comportamento della lampadina per $t > 0$. **(3 punti)**

2.) Con riferimento al circuito di Figura 2 si studi l'andamento nel tempo del campo magnetico intorno al filo che conduce al condensatore nelle zone esterne ma molto vicine al filo stesso in modo che il filo possa essere assunto praticamente infinito. Si discuta il modulo del campo magnetico (in funzione del tempo) facendo un plot del modulo di $B(t)/B_{\mathrm{Max}}$ (dove B_{Max} è il massimo valore assunto dallo stesso campo magnetico) in funzione di $t/(RC)$ (con $R = R_L + R_0$). **(3 punti)**

In che senso questa è una figura a carattere universale? Si discuta anche la direzione ed il verso del campo magnetico. Si faccia una figura del filo e del suo campo magnetico, che delucidi la situazione e che illustri le grandezze utilizzate. In che modo il valore del diametro (uniforme) del filo influenza il risultato? Perché? **(3 punti)**

facoltativo: Calcolare il lavoro totale fatto durante la carica del condensatore sulla lampadina. (*suggerimento: la potenza utilizzata dalla lampadina al tempo t vale* $P_L(t) = R_L i^2(t)$ *e la potenza è il lavoro fatto per unità di tempo...*). **(5 punti)**

3.) In un dato istante, il campo magnetico di un'onda elettromagnetica piana monocromatica è diretto lungo $-\hat{x}$ (diciamo verso OVEST), mentre il campo elettrico (allo stesso istante) è diretto lungo $-\hat{y}$ (verso SUD). Sapendo che l'intensità trasportata vale $I = 560 \cdot NN/5$ Watt/m^2, derivare:

i) direzione e verso di propagazione dell'onda; **(2 punti)**

ii) il valore massimo del campo elettrico; il valore massimo del campo magnetico; **(3 punti)**

iii) il contributo del campo magnetico e del campo elettrico all'intensità dell'onda; **(3 punti)**

iv) il numero di fotoni che incidono al secondo su di una superficie perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda se la sua lungheza d'onda vale $\lambda = 500$ nm; **(3 punti)**

v) l'energia cinetica degli elettroni estratti (per effetto fotoelettrico) dall'onda da un catodo il cui lavoro di estrazione vale $W_0 = 2.0$ eV. **(2 punti)**

4.) In un esperimento di interferenza da due fenditure (apparato di Young) una delle due fenditure viene ricoperta da un sottile foglio di plastica trasparente di indice di rifrazione $n = 1.60$. Quando il sistema viene illuminato con un fascio di luce monocromatica di lunghezza d'onda $\lambda = 640$ nm, il punto centrale sullo schermo non raccoglie più una frangia brillante, ma un minimo di interferenza. Stabilire il valore minimo dello spessore della lamina di plastica. **(6 punti)**

Valori utili:
- valore della carica elementare $q_e = 1.602 \times 10^{-19}$ Coulomb.
- costante di Planck $h = 6.626 \times 10^{-34}\ Joule \cdot sec$
- $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k_e \approx (2.998)^2 \times 10^9$ N·m^2 / C^2 ; $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$ Tesla · m/Ampere
- massa dell'elettrone $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ Kg
- velocità della luce 2.998×10^8 m/sec
- numero di Avogadro 6.022×10^{23} mole^{-1}
- equivalente meccanico del calore: 4.1868 Joule/cal

Fisica 2 per biotecnologie
Prova scritta: 13 Febbraio 2012
Soluzione Testo unico
per superare la prova è necessario accumulare almeno 18 punti

1.) *Si consideri un circuito come in Figura 1, in cui R_L rappresenta una lampadina ad incandescenza di potenza $P_L = 2.5$ Watt e tensione $V_L = NC/2$ Volt. Il sistema è alimentato da una batteria da $V_0 = 3 \cdot NC/2$ Volt. Per alimentare la lampadina con la tensione e la potenza corrette quanto deve valere la resistenza R_0?*

Si consideri poi il circuito di Figura 2 in cui, oltre agli elementi già discussi, è inserito un condensatore $C = 100\,\mu F$ ed un interruttore. Descrivere quantitativamente la corrente nel circuito in funzione del tempo assumendo che all'istante $t = 0$ il circuito venga chiuso ed il condensatore sia inizialmente scarico. Discutere anche qualitativamente il comportamento della lampadina per $t > 0$.

La potenza dissipata nella lampadina dipende dalla tensione ad i suoi capi e dalla corrente i che vi circola (risultati numerici per $NC = 6$)

$$P_L = V_L \cdot i \quad \rightarrow \quad 2.5\,\text{Watt} = NC/2\,\text{Volt} \cdot i \quad \rightarrow \quad i = \frac{2.5}{NC} \cdot 2 = \frac{5}{NC}\,\text{Ampere} = \frac{5}{6}\,\text{Ampere}\,.$$

Dunque la resistenza della lampadina risulta

$$R_L = \frac{V_L}{i} = \frac{(NC)^2}{10}\,\text{Ohm} = \frac{18}{5}\,\text{Ohm}\,,$$

e la resistenza R_0 deve avere quel valore che permette alla corrente di risultare esattamente i, ovvero

$$i = \frac{5}{NC}\,\text{Ampere} = \frac{V_0}{R_0 + R_L} = \ \rightarrow \quad R_0 = \frac{NC^2}{5}\,\text{Ohm} = \frac{36}{5}\,\text{Ohm} = 7.2\,\text{Ohm}\,.$$

Il circuito di Figura 2 vede l'aggiunta del condensatore in serie alla resistenza equivalente

$$R = R_L + R_0 = \frac{9}{5} NC\ \text{Ohm} = \frac{54}{5}\,\text{Ohm}\,.$$

Dopo la chiusura del circuito il condensatore si caricherà secondo la legge

$$V_C(t) = V_0 \left(1 - e^{-t/(RC)}\right)$$

dove $V_C(t)$ è la tensione ai capi del condensatore all'istante t nelle condizioni $V_C(t = 0) = 0$, come facilmente verificabile. La corrente risulta

$$i(t) = \frac{V_0 - V_C(t)}{R} = \frac{V_0}{R}\, e^{-\frac{t}{RC}}\,.$$

Il suo valore è massimo a $t = 0$, quando vale $i(t = 0) = \frac{V_0}{R}$, cioè il valore di corrente in assenza di condensatore (vedi discussione precedente): la lampadina risulterà accesa. Col trascorrere del tempo la corrente diminuirà e la luminosità della lampadina si affievolirà . Per tempi $t \gg RC$ la corrente si annullerà e la lampadina si spegnerà del tutto.

(**confronta esercizio 19 - 73 ed esempio 19 - 12 del libro di testo - Giancoli**)

2.) *Con riferimento al circuito di Figura 2 si studi l'andamento nel tempo del campo magnetico intorno al filo che conduce al condensatore nelle zone esterne ma molto vicine al filo stesso in modo che il filo possa essere assunto praticamente infinito. Si discuta il modulo del campo magnetico (in funzione del tempo) facendo un plot del modulo di $B(t)/B_{\rm Max}$ (dove $B_{\rm Max}$ è il massimo valore assunto dallo stesso campo magnetico) in funzione di $t/(RC)$ (con $R = R_L + R_0$).*

In che senso questa è una figura a carattere universale? Si discuta anche la direzione ed il verso del campo magnetico. Si faccia una figura del filo e del suo campo magnetico, che delucidi la situazione e che illustri le grandezze utilizzate. In che modo il valore del diametro (uniforme) del filo influenza il risultato? Perché?

Il campo magnetico di un filo molto lungo rispetto alla distanza d dal filo in cui si vuol determinare il campo, circola in maniera tangente alla circonferenza di raggio d ed ortogonale al filo. La direzione di circolazione è fissata dalla regola della mano destra. Il legame tra il modulo del campo magnetico $|\mathbf{B}(t)|$ e la corrente circolante nel filo $i(t)$ risulta

$$|\mathbf{B}(t)| = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\,i(t)}{d}$$

quando il punto campo dista d dal filo (si noti che (seguendo il testo) $d > D/2$ se D è il diametro del filo, ovvero il punto dove calcolare il campo è esterno al filo).

Nel caso presente, utilizzando i risultati dell'esercizio precedente con $NC = 6$, si ha (si noti che $RC = 1.08 \cdot 10^{-3}\,\rm sec$)

$$i(t) = \frac{V_0}{R}\, e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{9\,\rm Volt}{10.8\,\Omega}\, e^{-\frac{t}{1.08\cdot 10^{-3}\,\rm sec}} = \frac{5}{6}\, e^{-\frac{t}{1.08\cdot 10^{-3}\,\rm sec}} \;\; \rm Ampere\,.$$

Il (modulo del) campo magnetico risulta quindi

$$|\mathbf{B}(t)| = B_{\rm Max}\, e^{-\frac{t}{1.08\cdot 10^{-3}\,\rm sec}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{5}{6}\,\frac{2}{d} e^{-\frac{t}{1.08\cdot 10^{-3}\,\rm sec}}\,\rm Tesla \quad .$$

dove $B_{\rm Max} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{5}{3d}\,10^{-7}$ Tesla. In Fig. 3 il plot richiesto $|\mathbf{B}(t)|/B_{\rm Max}$ in funzione di $x = t/(1.08 \cdot 10^{-3}\,\rm sec)$. Si noti che il plot mostra la figura universale della funzione e^{-x}, con $0 < x < 10$, e che per $x > 6$ il valore della funzione è pressoché nullo.

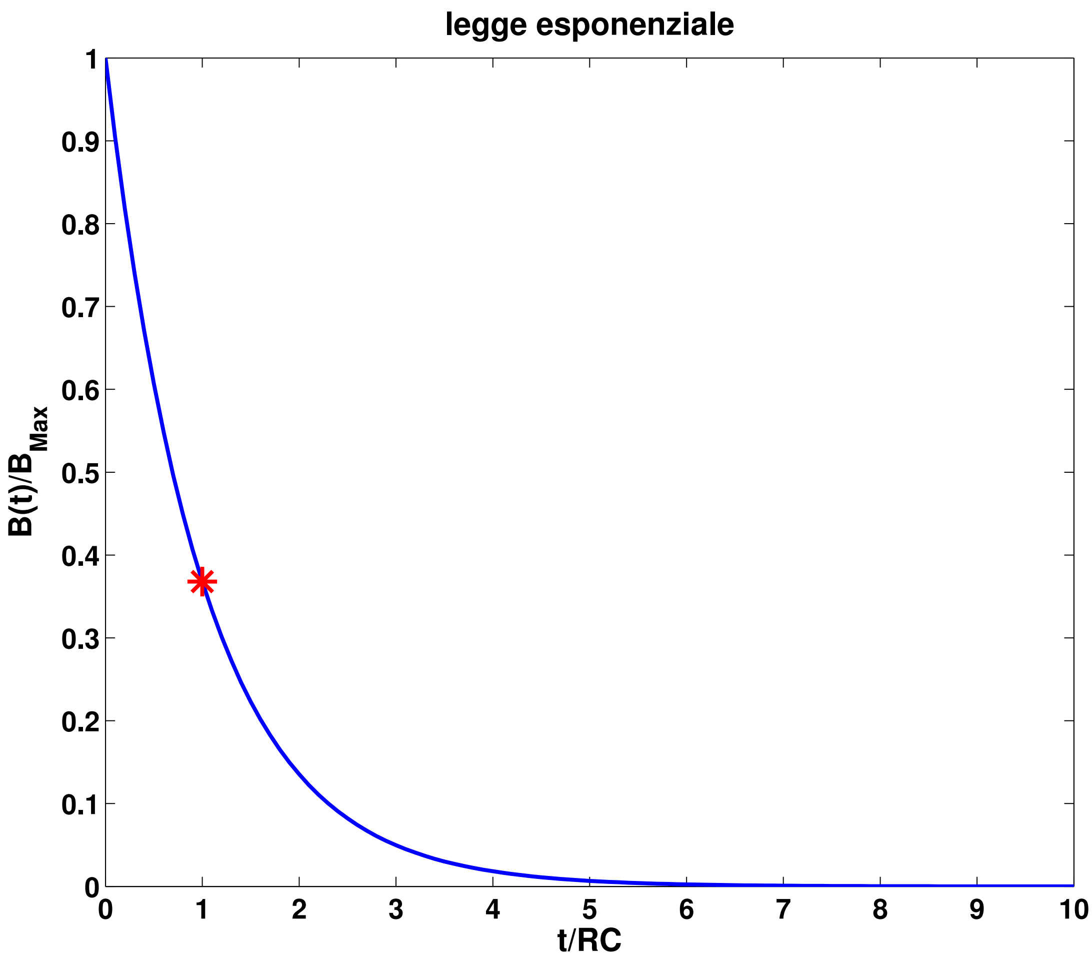

Figure 1: Plot della funzione $|\mathbf{B}(t)|/B_{\rm Max} = e^{-\frac{t}{(RC)}}$ in funzione di $t/(RC)$, quindi il plot della funzione $f(x) = e^{-x}$ in funzione di x. L'asterisco evidenzia il valore della funzione per $x = 1$, ovvero $f(x=1) = e^{-1} = 1/e \approx 0.3679$.

Il verso e la direzione del campo magnetico solo tali che esso circola intorno al filo secondo la regola della mano destra una volta fissati direzione e verso della corrente.

Il diametro del filo non compare nella valutazione del campo magnetico finché il punto dove lo si calcola resta esterno al filo stesso.

facoltativo: *Calcolare il lavoro totale fatto durante la carica del condensatore sulla lampadina. (suggerimento: la potenza utilizzata dalla lampadina al tempo t vale $P_L(t) = R_L i^2(t)$ e la potenza è il lavoro fatto per unità di tempo...).*

$$P_L(t) = \frac{dL}{dt} = R_L i^2(t) = R_L \cdot \frac{V_0^2}{R^2}\, e^{-2\frac{t}{RC}}$$

dove $\frac{dL}{dt}$ è il lavoro fatto per unità di tempo sulla lampadina. Il lavoro totale sarà dunque

$$L = \int_0^\infty dt\, R_L i^2(t) = \frac{1}{2}\, R_L\, C\, \frac{V_0^2}{R}\, .$$

3.) *In un dato istante, il campo magnetico di un'onda elettromagnetica piana monocromatica è diretto lungo $-\hat{x}$ (OVEST), mentre il campo elettrico (allo stesso istante) è diretto lungo $-\hat{y}$ (SUD). Sapendo che l'intensità trasportata vale $I = 560 \cdot NN/5$ Watt/m^2, derivare:*

i) direzione e verso di propagazione dell'onda;

ii) il valore massimo del campo elettrico; il valore massimo del campo magnetico;

iii) il contributo del campo magnetico e del campo elettrico all'intensità dell'onda;

iv) il numero di fotoni che incidono al secondo su di una superficie perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda se la sua lungheza d'onda vale $\lambda = 500$ nm;

v) l'energia cinetica degli elettroni estratti (per effetto fotoelettrico) dall'onda da un catodo il cui lavoro di estrazione vale $W_0 = 2.0$ eV.

soluzione:

i) La direzione di propagazione è la direzione del vettore $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, quindi la direzione $+\hat{z}$, ovvero verso l'alto.

ii) l'intensità dell'onda è data dal valore medio nel tempo del vettore $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ proiettato nella direzione di propagazione, dunque (per NN = 5)

$$I = \langle \mathbf{S}\cdot(\hat{z})\rangle = \frac{1}{\mu_0}\langle|\mathbf{E}(t)||\mathbf{B}(t)|\rangle = \frac{1}{\mu_0}\langle|\mathbf{E}(t)|\frac{|\mathbf{E}(t)|}{c}\rangle = \frac{1}{\mu_0 c}\langle\mathbf{E}^2(t)\rangle = \frac{1}{\mu_0 c}E_{qm}^2 = \frac{1}{2\mu_0 c}E_0^2\,;$$

uguaglianze giustificate dal fatto che: 1) $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ sono ortogonali tra loro e $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ giace lungo la direzione di propagazione; 2) il campo magnetico risulta pari al campo elettrico diviso per c (velocità della luce); 3) il valore quadratico medio del campo elettrico $E_{qm} = \langle\mathbf{E}^2(t)\rangle$ in un'onda sinusoidale vale la metà del valore massimo $E_{qm}^2 = E_0^2/2$.

Dunque:

$$E_0 = \sqrt{2\frac{\mu_0}{4\pi}4\pi c\, I} \approx 291\,\sqrt{NN}\,\text{Volt/m} \approx 650\,\text{Volt/m}\,;$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} \approx 9.7\cdot 10^{-7}\,\sqrt{NN}\,\text{Tesla} \approx 2.17\cdot 10^{-6}\,\text{Tesla.}$$

iii) L'intesità dell'onda equivale alla sua densità di energia (media) u moltiplicata per la sua velocità (c):

$$I = c\,\langle u\rangle = c\,\langle\left(\frac{1}{2}\epsilon_0\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2\right)\rangle = c\,\langle\left(\frac{1}{2}\epsilon_0\mathbf{E}^2 + \frac{\epsilon_0\mu_0}{2\mu_0}\mathbf{E}^2\right)\rangle = c\epsilon_0\langle\mathbf{E}^2\rangle\,;$$

dunque i contributi elettrico e magnetico all'intensità sono uguali, malgrado i loro valori massimi siano molto diversi nelle unità di misura MKSA.

iv) Interpretando l'onda come un insieme di fotoni, ognuno con energia $E_\gamma = hf = \frac{hc}{\lambda}$ per aver l'intensità I ne occorrono N al secondo per m^2

$$I = E_\gamma\cdot N\,, \qquad \to N = \frac{I}{E_\gamma} = \frac{I\lambda}{hc} \approx \frac{NN}{5}1.41\times 10^{21}\,\text{fotoni/sec/m}^2\,,$$

ognuno con energia $E_\gamma \approx 3.98\times 10^{-19}\,\text{Joule} \approx 2.48$ *eV.*

v) L'energia cinetica del foto-elettrone emesso vale

$$E_c = E_\gamma - W_0 \approx 0.48\,\text{eV}\,.$$

(**confronta esercizio 22 - 33 del libro di testo - Giancoli** *(parziale)*)

4.) *In un esperimento di interferenza da due fenditure (apparato di Young) una delle due fenditure viene ricoperta da un sottile foglio di plastica trasparente di indice di rifrazione $n = 1.60$. Quando il sistema viene illuminato con un fascio di luce monocromatica di lunghezza d'onda $\lambda = 640$ nm, il punto centrale sullo schermo non raccoglie più una frangia brillante, ma un minimo di interferenza. Stabilire il valore minimo dello spessore della lamina di plastica.*

Nell'attraversare la lamina di plastica il raggio luminoso (chiamiamolo (1)) ha una velocità di propagazione minore della velocità della luce nel vuoto con cui il fascio (2) attraversa l'altra fenditura. Il fascio (1) accumula così un ritardo che rende il suo cammino ottico diverso da quello del fascio (2). In pratica chiamato Δ lo spessore (incognito) della lamina, $t_1 = \Delta/v = \Delta\cdot n/c$ è il tempo necessario al fascio (1) per attraversare lo spessore Δ, mentre $t_2 = \Delta/c$ è il tempo necessario al fascio (2) per attraversare lo stesso spessore Δ privo di lamina di plastica (se si vuole in questo caso $n = 1$).

Il ritardo accumulato vale

$$t_1 - t_2 = \Delta t = \left(\frac{\Delta}{v} - \frac{\Delta}{c}\right) = \frac{\Delta}{c}\,(n-1)\,.$$

La differenza di cammino ottico tra i due fasci è dunque

$$\delta = c\Delta t = \Delta(n-1).$$

Quando questa differenza sarà uguale a mezza lunghezza d'onda (o multipli interi di essa) la frangia centrale risulterà un minimo, ovvero la condizione perché al centro appaia un minimo risulta

$$\delta = k\,\frac{\lambda}{2} \qquad \rightarrow \quad \Delta = k\,\frac{\lambda}{2}\frac{1}{n-1} = k\,\frac{640\,\mathrm{nm}}{2}\frac{1}{1.60-1} \approx k{\cdot}533\,\mathrm{nm}\,. \qquad \mathrm{con}\; k = 1, 2, 3, ... \quad .$$

Il minimo spessore risulterà per $k = 1$.

(**confronta esercizio 24 - 13 del libro di testo - Giancoli**)