Fisica 2 per biotecnologie
Prova scritta (in itinere): 11 Aprile 2011
Testo A
per superare la prova è necessario accumulare almeno 18 punti

1. Alcune specie di pesci sono in grado di avvertire campi elettrici fino ad un minimo di 7 μN/C = 7 μ V/m. Alla distanza di un metro quale carica minima possono rilevare? A che valore di differenza di potenziale corrisponde? (punti 1)

2. Calcolare la capacità di un condensatore a facce piane e parallele di superficie 10 cm^2 e poste alla distanza di 1 mm, nei seguenti casi:

a) tra le piastre è fatto il vuoto; (punti 2)

b) tra le piastre è interposto un dielettrico omogeneo di costante dielettrica $\epsilon_r = K = 5$; (punti 3)

c) tra le piastre è interposto un blocchetto, costituito da due dielettrici di 5 cm^2 ed altezza 1 mm, affiancati in modo da riempire tutto lo spazio tra le armature. L'uno ha $K = 2$, l'altro $K = 6$ (confronta figura 1). (punti 6)

3. Un voltmetro (V) ed un amperometro (A) sono montati come in figura 2 (voltmetro a monte) per la misura di una resistenza $R = 100\,\Omega$. Sapendo che la resistenza interna del voltmetro vale $R_V = 1\ \mathrm{K}\,\Omega$ e quella dell'amperometro vale $R_A = 10\,\Omega$, stabilire:

a) i valori letti su (A) e (V); (punti 4)

b) l'errore sul valore della resistenza stimato tramite il rapporto $\frac{(\mathrm{V})}{(\mathrm{A})}$ rispetto al valore vero $R = 100\,\Omega$; (punti 4)

c) se la misura è in difetto o in eccesso. (punti 2)

4. Un lungo filo percorso da corrente costante $i = 0.5$ A, stabilisce nel suo intorno un campo magnetico. La corrente sia nella direzione $\hat{y}$ di un piano (x, y). Indicare valore, direzione e verso del campo magnetico nei punti $P_1 = (1\,\mathrm{cm}, 1\,\mathrm{cm})$, $P_2 = (10\,\mathrm{cm}, 0\,\mathrm{cm})$, $P_3 = (-1\,\mathrm{cm}, -5\,\mathrm{cm})$;

fare un disegno schematico dei dati del problema e dell'andamento del campo magnetico. (punti 5)

5. In un campo magnetico di 0.5 Tesla, un fascio di protoni si muove lungo una circonferenza di raggio $R = 5.4$ cm. Determinare direzione verso e valore del campo elettrico che è necessario instaurare nella stessa zona per rendere rettilinea la traiettoria. Fare un disegno schematico dell'apparato delineando il verso dei campi. (punti 5)

6. (**facoltativo**) In un circuito composto da resistenza $R = 1$ K Ω e capacità $C = 100$ nF, poste in serie ed alimentate da una tensione alternata $V(t) = 20 \sin 2\pi f t$, con $f = 10$ K Hz, determinare il valore massimo della differenza di potenziale ai capi della resistenza e della capacità. (punti 8).

Valori utili:

- valore della carica elementare $q_e = 1.602 \times 10^{-19}$ Coulomb.

- massa del protone $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ Kg.

- costante elettrica $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k_e \approx 9 \times 10^9$ N·m^2 / C^2

Fisica 2 per biotecnologie
Prova scritta (in itinere): 11 Aprile 2011
Testo B
per superare la prova è necessario accumulare almeno 18 punti

1. Calcolare il lavoro necessario per portare da un punto molto lontano, una carica $q = 5\,\mu$ C al vertice di un triangolo equilatero di lato 0.5 cm, i cui altri vertici sono occupati da due cariche fisse $Q = 10\,\mu$ C. (punti 1)

2. Calcolare la capacità di un condensatore a facce piane e parallele di superficie 10 cm^2 e poste alla distanza di 1 mm, nei seguenti casi:

a) tra le piastre è interposto un dielettrico omogeneo di costante dielettrica $\epsilon_r = K = 4.5$; (punti 3)

b) tra le piastre è fatto il vuoto; (punti 2)

c) tra le piastre è interposto un blocchetto di dielettrico ($K = 7$) di soli 5 cm^2 ed altezza 1 mm, che riempie metà dello spazio tra le armature (confronta figura 1). (punti 6)

3. Un voltmentro (V) ed un amperometro (A) sono montati come in figura 2 (voltmetro a valle) per la misura di una resistenza $R = 100\,\Omega$. Sapendo che la resistenza interna del voltmetro vale $R_V = 1$ KΩ e quella dell'amperometro vale $R_A = 10\,\Omega$, stabilire:

a) i valori letti su (A) e (V); (punti 4)

b) l'errore sul valore della resistenza stimato tramite il rapporto $\frac{(V)}{(A)}$ rispetto al valore vero $R = 100\,\Omega$; (punti 4)

c) se la misura è in difetto o in eccesso. (punti 2)

4. Un lungo filo percorso da corrente costante $i = 1.5$ A, stabilisce nel suo intorno un campo magnetico. La corrente sia nella direzione $\hat{x}$ di un piano (x, y). Indicare valore, direzione e verso del campo magnetico nei punti $P_1 = (1\,\text{cm}, 1\,\text{cm})$, $P_2 = (0\,\text{cm}, 10\,\text{cm})$, $P_3 = (-5\,\text{cm}, -1\,\text{cm})$; fare un disegno schematico dei dati del problema e dell'andamento del campo magnetico. (punti 5)

5. In un campo magnetico di 1.2 Tesla, un fascio di protoni si muove lungo una circonferenza di raggio $R = 6.2$ cm. Determinare direzione verso e valore del campo elettrico che è necessario instaurare nella stessa zona per rendere rettilinea la traiettoria. Fare un disegno schematico dell'apparato delineando il verso dei campi.(punti 5)

6. (**facoltativo**) In un circuito composto da resistenza $R = 0.5$ K$\,\Omega$ e capacità $C = 10$ nF, poste in serie ed alimentate da una tensione alternata $V(t) = 30 \sin 2\pi\, f\, t$, con $f = 5$ K Hz, determinare il valore massimo della differenza di potenziale ai capi della resistenza e della capacità. (punti 8).

Valori utili:

- valore della carica elementare $q_e = 1.602 \times 10^{-19}$ Coulomb.

- massa del protone $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ Kg.

- costante elettrica $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k_e \approx 9 \times 10^9$ N$\cdot$m^2 / C^2

Fisica 2 per biotecnologie
Prova scritta (in itinere): 11 Aprile 2011
Soluzione Testo A
per superare la prova è necessario accumulare almeno 18 punti

1. Alcune specie di pesci sono in grado di avvertire campi elettrici fino ad un minimo di 7 μN/C = 7 μ V/m. Alla distanza di un metro quale carica minima possono rilevare? A che valore di differenza di potenziale corrisponde? (punti 1)

Il (modulo del) campo elettrico dovuto ad una carica puntiforme vale

$$E = k_e \frac{q}{r^2}$$

quindi la carica che lo genera risulta

$$q = E\frac{r^2}{k_e} \approx 7 \times 10^{-6}\, N/C \cdot \frac{1\, m^2}{9 \times 10^9 Nm^2/C^2} \approx 0.78 \times 10^{-15}\, C\,,$$

che alla distanza di un metro produce un potenziale elettrico

$$V = k_e \frac{q}{r} \approx 9 \times 10^9\, Nm^2/C^2 \cdot \frac{0.78 \times 10^{-15}\, C}{1m} \approx 7.0 \times 10^{-6}\, V/m\,.$$

2. Calcolare la capacità di un condensatore a facce piane e parallele di superficie 10 cm^2 e poste alla distanza di 1 mm, nei seguenti casi:

a) tra le piastre è fatto il vuoto; (punti 2)

$$\begin{aligned} C_0 &= \epsilon_0 \frac{A}{d} = 4\pi\epsilon_0 \frac{1}{4\pi}\frac{A}{d} \approx \frac{1}{9 \times 10^9}\frac{C^2}{N\, m^2}\,\frac{1}{4\pi}\,\frac{10 \times 10^{-4}\, m^2}{10^{-3}\, m} = \\ &= \frac{1 \cdot 10^{-9}}{36\pi}\,\frac{C}{Volt} \approx 8.84 \times 10^{-12} = 8.84\, pF\,. \end{aligned}$$

b) tra le piastre è interposto un dielettrico omogeneo di costante dielettrica $\epsilon_r = K = 5$; (punti 3)

$$C = \epsilon_r\, C_0 = 44.20\, pF\,.$$

c) tra le piastre è interposto un blocchetto, costituito da due dielettrici di 5 cm^2 ed altezza 1 mm, affiancati in modo da riempire tutto lo spazio tra le armature. L'uno ha $K = 2$, l'altro $K = 6$ (confronta figura 1). (punti 6)

La soluzione è facilmente ottenibile se si coglie che le due parti di condensatore sono riducibili a due condensatori in parallelo ciascuno di area $A/2$:

$$\begin{aligned} C &= \epsilon_0\, \epsilon_{1r} \frac{A}{2d} + \epsilon_{2r} \frac{A}{2d} = 4\pi\epsilon_0 \frac{1}{4\pi} \frac{A}{2d} \,(\epsilon_{1r} + \epsilon_{2r}) = \\ &\approx \frac{1}{9 \times 10^9} \frac{C^2}{N\, m^2} \frac{1}{4\pi} \frac{10 \times 10^{-4}\, m^2}{2 \cdot 10^{-3}\, m} (2+6) = \\ &= \frac{4 \cdot 10^{-9}}{36\pi} \frac{C}{Volt} \approx 4.0 \cdot 8.84 \times 10^{-12} = 35.36\, pF\,. \end{aligned}$$

3. Un voltmetro (V) ed un amperometro (A) sono montati come in figura 2 (voltmetro a monte) per la misura di una resistenza $R = 100\,\Omega$. Sapendo che la resistenza interna del voltmetro vale $R_V = 1$ K$\,\Omega$ e quella dell'amperometro vale $R_A = 10\,\Omega$, stabilire:

a) i valori letti su (A) e (V); (punti 4)

La corrente i erogata dalla batteria si dividerà in due rami, una attraverserà il volmetro (i_V), l'altra la resistenza l'amperometro (A) e la resistenza R ($i_R = i_A$), ovvero

$$\begin{aligned} (A) = i_A &= = \frac{V_0}{R + R_A} = \\ &= \frac{5\,V}{10 + 100\,\Omega} = \frac{5}{110}\, Ampere\,. \end{aligned}$$

D'altra parte la differenza di potenziale (V) misurata dal voltmetro coincide con la tensione ai capi della batteria.

b) l'errore sul valore della resistenza stimato tramite il rapporto $\frac{(\mathrm{V})}{(\mathrm{A})}$ rispetto al valore vero $R = 100\,\Omega$; (punti 4)

Si ha

$$\frac{(V)}{(A)} = \frac{V_0}{i_A} = \frac{5\,V}{\frac{5}{110}\,A} = 110\,\Omega\,.$$

dato che $(V) \equiv V_0$.

c) se la misura è in difetto o in eccesso. (punti 2)

La misura è in eccesso poiché la differenza di potenziale misurata dal voltmetro è più grande del valore della differenza di potenziale ai capi della resistenza, mentre la corrente misurata dall'amperometro è l'effettiva corrente che attraversa la resistenza.

4. Un lungo filo percorso da corrente costante $i = 0.5$ A, stabilisce nel suo intorno un campo magnetico. La corrente sia nella direzione $\hat{y}$ di un piano (x, y). Indicare valore, direzione e verso del campo magnetico nei punti $P_1 = (1\,\text{cm}, 1\,\text{cm})$, $P_2 = (10\,\text{cm}, 0\,\text{cm})$, $P_3 = (-1\,\text{cm}, -5\,\text{cm})$; fare un disegno schematico dei dati del problema e dell'andamento del campo magnetico. (punti 5)

Il filo si può approssimare con un filo praticamente infinito e va supposto lungo l'asse $\hat{y}$. Quindi il vettore corrente risulta $\vec{i} = \hat{y}\, i$. Il campo magnetico circola attorno al filo secondo la regola della mano destra e può perciò essere scritto

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\, 2\, \frac{\vec{i} \times \hat{\rho}}{d}\,,$$

dove il punto $\vec{\rho} = (x\hat{x})$ è il punto campo di coordinate (x, y), d è la distanza dal filo del punto in cui si vuole calcolare il campo magnetico e, nel nostro caso vale $|\vec{\rho}\,| = |x|$. Si ottiene perciò:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\, 2\, \frac{\vec{i} \times \hat{\rho}}{|\vec{\rho}\,|} = \frac{\mu_0}{4\pi}\, 2\, i \frac{\hat{y} \times (\hat{x}\, x)}{|x|\, d} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\, 2\, \hat{z}\, i\, \frac{x}{|x|\, d}\,, \tag{1}$$

e $\vec{B}$ è diretto lungo $\hat{z}$, nel verso positivo per $x < 0$ e nel verso negativo per $x > 0$. In dettaglio, per vari punti:

- Punto P_1: $\vec{\rho}_1 = (\hat{x})\ 1\,\text{cm}$,
  $\vec{B}_1 = \hat{z}\, B_1 = -\hat{z}\, \frac{\mu_0}{4\pi}\, 2\, i \frac{1}{|x_1|} = -\hat{z}\ 10^{-7}\, 2\, \frac{0.5\, A}{10^{-2}\, m} =$
  $= -\hat{z}\, 1 \times 10^{-5}$ Tesla.
- Punto P_2:
  $\vec{B}_2 = \hat{z}\, B_2 = -\hat{z}\, \frac{\mu_0}{4\pi}\, 2\, \frac{i}{|x_2|} = -\hat{z}\ 10^{-7}\, 2\, \frac{0.5\, A}{10 \times 10^{-2}\, m} =$
  $= -\hat{z}\, 1 \times 10^{-6}$ Tesla.

- Punto P_3:
  $\vec{B}_3 = \hat{z}\, B_3 = +\hat{z}\, \frac{\mu_0}{4\pi}\, 2\, \frac{i}{|x_3|} = +\hat{z}\; 10^{-7}\, 2\, \frac{0.5\, A}{10 \times 10^{-2}\, m} =$
  $= +\hat{z}\, 1 \times 10^{-5}$ Tesla.

5. In un campo magnetico di 0.5 Tesla, un fascio di protoni si muove lungo una circonferenza di raggio $R = 5.4$ cm. Determinare direzione verso e valore del campo elettrico che è necessario instaurare nella stessa zona per rendere rettilinea la traiettoria. Fare un disegno schematico dell'apparato delineando il verso dei campi. (punti 5)

Il moto circolare è prodotto dalla forza esercitata dal campo magnetico ($q_p vecv_p \times \vec{B}$) che fornisce la forza centripeta ($m_p v_p^2/R$) necessaria, essendo il raggio fissato, la velocità del protone lungo il cerchio può essere determinata (supponiamo il moto circolare nel piano x, y e $\vec{B} = (0.0, -|B| = -B)$, così che il moto circolare sarà in senso orario nel piano)

$$\text{da} \quad q_p\, v_p\, B = \frac{m_p v_p^2}{R} \quad \rightarrow \quad v_p = \frac{q_p\, R\, B}{m_p} \tag{2}$$

Applicando, nella stessa zona interessata dal campo magnetico, un campo elettrico ortogonale al campo magnetico e diretto lungo $\hat{y}$, ovvero $\vec{E} = (0, E = |E|, 0)$ nel momento in cui i protoni sono viaggiano con velocità $\vec{v}_p = (v_p = |v_p|, 0, 0)$, sollecitati dalla forza magnetica lungo la dire $-\hat{y}$, si potrà annullare la forza sui protoni

$$\vec{F}_p = \vec{F}_B + \vec{F}_E = q_p\, (\vec{E} + \vec{v}_p \times \vec{B}) = \hat{y}\, q_p\, (E - v_p\, B) \tag{3}$$

se vale la relazione

$$E = v_p\, B$$

ovvero se

$$\begin{aligned} E &= q_p\, B^2 \frac{R}{m_p} = \\ &\approx 1.602 \times 10^{-19}\, C \cdot 0.5^2\, Tesla^2 \cdot \frac{5.4 \times 10^{-2}\, m}{1.67 \times 10^{-27}\, Kg} = \\ &\approx 1.30 \times 10^6\, Volt/m\,. \end{aligned} \tag{4}$$

6. (**facoltativo**) In un circuito composto da resistenza $R = 1$ K$\,\Omega$ e capacità $C = 100$ nF, poste in serie ed alimentate da una tensione alternata $V(t) = 20\, Volt\, \sin 2\pi\, f\, t$, con $f = 10$ K Hz, determinare il valore massimo della differenza di potenziale ai capi della resistenza e della capacità. (punti 8).

Il circuito è alimentato da una tensione alternata $V(t) = V_M \sin\omega t$ con $\omega = 2\pi f = 6.28 \times 10^4$ rad/sec, ed il massimo valore di tensione $V_M = 20$ Volt. Sappiamo che la corrente che ne risulta deve essere alternata e con un'ampiezza massima I_M e con la stessa frequenza f, non necessariamente in fase con la tensione, quindi la corrente può essere scritta $i(t) = I_M \sin(\omega t + \phi)$ con I_M e ϕ da determinare in base all'equazione del circuito. Sapendo che la tensione ai capi della resistenza vale $V_R(t) = R \cdot i(t)$ per la legge di Ohm e che la tensione ai capi del condensatore vale $V_C(t) = q(t)/C$, dove $q(t)$ è la carica accumulata al tempo t, si scrivono le equazioni

$$
\begin{aligned}
V(t) &= V_R(t) + V_C(t)\ , \\
\frac{dV(t)}{dt} &= \frac{dV_R(t)}{dt} + \frac{dV_C(t)}{dt} = R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\, i(t)\ , \quad \text{ovvero} \\
\omega\, V_M \cos\omega t &= R\,\omega\, I_M\, \cos(\omega t + \phi) + \frac{1}{C}\, I_M\, \sin(\omega t + \phi)\,; \quad \text{che diviene} \\
\omega\, V_M \cos\omega t &= R\,\omega\, I_M\, (\cos\omega t\, \cos\phi - \sin\omega t\, \sin\phi) + \frac{1}{C}\, I_M\, \sin\omega t\, \cos\phi + \\
&+ \frac{1}{C}\, I_M\, \cos\omega t\, \sin\phi\ ;
\end{aligned}
$$

e uguagliando i coefficienti di $\sin\omega t$ e $\cos\omega t$ devono vale le uguaglianze

$$
\begin{aligned}
\omega\, V_M &= R\,\omega\, I_M\, \cos\phi + \frac{1}{C}\, I_M\, \sin\phi \\
0 &= -R\,\omega\, I_M\, \sin\phi + \frac{1}{C}\, I_M\, \cos\phi\ ;
\end{aligned}
$$

ovvero (dalla seconda)

$$
\tan\phi = \frac{1}{\omega RC}\ , \quad \text{quindi} \quad \sin\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}\ , \quad \cos\phi = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}
$$

che sostituita nella prima permette di calcolare I_M

$$
I_M = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = 19.8 \times 10^{-3}\, \text{Ampere}\,. \tag{5}
$$

Si ottengono le differenze di potenziale ai capi della resistenza:

$$V_R(t) = Ri(t) = R\, I_M \sin(\omega t + \phi) \approx 19.75\, Volt\ \sin(\omega t + \phi)\,,$$

e della capacità:

$$\begin{aligned} V_C(t) &= \frac{1}{C}\, q(t) = \frac{1}{C} \int I_M \sin(\omega t + \phi)\, dt = \\ &= -\frac{1}{\omega C}\, I_M\ \cos(\omega t + \phi) = -3.15\, Volt\ \cos(\omega t + \phi)\,. \end{aligned}$$

Fisica 2 per biotecnologie
Prova scritta (in itinere): 11 Aprile 2011
Soluzione Testo B
per superare la prova è necessario accumulare almeno 18 punti

1. *Calcolare il lavoro necessario per portare da un punto molto lontano, una carica $q = 5\,\mu$ C al vertice di un triangolo equilatero di lato 0.5 cm, i cui altri vertici sono occupati da due cariche fisse $Q = 10\,\mu$ C. (punti 1)*

   Il potenziale elettrico è definito proprio come il lavoro per unità di carica fatto contro le forze del campo per portare la carica unitaria dall'infinito (= molto lontano dal punto di arrivo, in questo caso da distanza molto maggiore della del lato l del triangolo equilatero), quindi

$$\begin{aligned} L &= qV = k_e\left(\frac{Q}{l}+\frac{Q}{l}\right) = 2\,q\,k_e\,\frac{Q}{l} = \\ &\approx 2\cdot 5\times 10^{-6}\,C\cdot 9\times 10^{9}\frac{N\,m^2}{C^2}\,\frac{10\times 10^{-6}\,C}{0.5\times 10^{-2}\,m} = \\ &= 180\,N\cdot m = 180\,Joule\,. \end{aligned} \tag{6}$$

2. *Calcolare la capacità di un condensatore a facce piane e parallele di superficie 10 cm^2 e poste alla distanza di 1 mm, nei seguenti casi:*

   a) *tra le piastre è interposto un dielettrico omogeneo di costante dielettrica $\epsilon_r = K = 4.5$; (punti 3)*

$$\begin{aligned} C &= \epsilon_0\,\epsilon_r\frac{A}{d} = 4\pi\epsilon_0\frac{\epsilon_r}{4\pi}\frac{A}{d} \approx \frac{1}{9\times 10^9}\frac{C^2}{N\,m^2}\,\frac{4.5}{4\pi}\,\frac{10\times 10^{-4}\,m^2}{10^{-3}\,m} = \\ &= \frac{4.5\cdot 10^{-9}}{36\pi}\,\frac{C}{Volt} \approx 4.5\cdot 8.84\times 10^{-12} = 39.80\,pF\,. \end{aligned} \tag{7}$$

   b) *tra le piastre è fatto il vuoto; (punti 2)*

$$C_0 = C/\epsilon_r = \frac{10^{-9}}{36\pi}\,\frac{C}{Volt} \approx 8.84\,pF\,. \tag{8}$$

c) *tra le piastre è interposto un blocchetto di dielettrico ($K = 7$) di soli 5 cm^2 ed altezza 1 mm, che riempie metà dello spazio tra le armature (confronta figura 1). (punti 6)*

La soluzione è facilmente ottenibile se si coglie che le due parti di condensatore sono riducibili a due condensatori in parallelo ciascuno di area $A/2$:

$$\begin{aligned} C &= \epsilon_0\,\epsilon_r \frac{A}{2d} + \epsilon_0\,\frac{A}{2d} = 4\pi\epsilon_0 \frac{1}{4\pi}\frac{A}{2d}\,(\epsilon_r + 1) = \\ &\approx \frac{1}{9\times 10^9}\frac{C^2}{N\,m^2}\,\frac{1}{4\pi}\,\frac{10\times 10^{-4}\,m^2}{2\cdot 10^{-3}\,m}(7+1) = \\ &= \frac{4\cdot 10^{-9}}{36\pi}\,\frac{C}{Volt} \approx 4.0\cdot 8.84\times 10^{-12} = 35.36\,pF\,. \end{aligned} \tag{9}$$

3. *Un voltmentro (V) ed un amperometro (A) sono montati come in figura 2 (voltmetro a valle) per la misura di una resistenza $R = 100\,\Omega$. Sapendo che la resistenza interna del voltmetro vale $R_V = 1\ K\Omega$ e quella dell'amperometro vale $R_A = 10\,\Omega$, stabilire:*

a) *i valori letti su (A) e (V); (punti 4)*

La corrente che circola in (A) *(i_A) si dividerà in due rami, una attraverserà il volmetro (i_V), l'altra la resistenza R (i_R), ovvero*

$$\begin{aligned} (A) = i_A &= i_V + i_R = \frac{V_0}{R_{eq}} = \frac{V_0}{R_A + \frac{R_V R}{R+R_V}} = \\ &= \frac{5\,V}{10\,\Omega + \frac{100\cdot 1000}{100+1000}\,\Omega} = \frac{55}{1110}\,Ampere\,, \end{aligned}$$

dove R_{eq} è data dalla serie di R_A con il parallelo di R_V con R. Si ha

$$(V) = V_0 - i_A\cdot R_A = 5\,V - \frac{55}{1110}\,A\cdot 10\,\Omega = \frac{500}{111} \approx 4.5\,V\,.$$

b) *l'errore sul valore della resistenza stimato tramite il rapporto* $\frac{\text{(V)}}{\text{(A)}}$ *rispetto al valore vero $R = 100\,\Omega$; (punti 4) dato che* (A) $\equiv i_A$,

$$\frac{(V)}{(A)} = \frac{500}{111}\cdot\frac{1110}{55} = \frac{5000}{55} \approx 90.9\,\Omega\,.$$

c) *se la misura è in difetto o in eccesso. (punti 2)*

La misura sottostima il valore vero della resistenza, la corrente misurata, infatti, non è quella che realmente circola nella resistenza, quest'ultima è solo una frazione di i_A.

4. *Un lungo filo percorso da corrente costante* $i = 1.5$ *A, stabilisce nel suo intorno un campo magnetico. La corrente sia nella direzione* $\hat{x}$ *di un piano* (x, y). *Indicare valore, direzione e verso del campo magnetico nei punti* $P_1 = (1\,\mathrm{cm}, 1\,\mathrm{cm})$, $P_2 = (0\,\mathrm{cm}, 10\,\mathrm{cm})$, $P_3 = (-5\,\mathrm{cm}, -1\,\mathrm{cm})$; *fare un disegno schematico dei dati del problema e dell'andamento del campo magnetico. (punti 5)*

Il filo si può approssimare con un filo praticamente infinito e va supposto lungo l'asse $\hat{x}$. *Quindi il vettore corrente risulta* $\vec{i} = \hat{x}\, i$. *Il campo magnetico circola attorno al filo secondo la regola della mano destra e può perciò essere scritto*

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\, 2\, \frac{\vec{i} \times \hat{\rho}}{d}\,,$$

dove il punto $\vec{\rho} = (y\hat{y})$ *è il punto campo di coordinate* (x, y), d *è la distanza dal filo del punto in cui si vuole calcolare il campo magnetico e, nel nostro caso vale* $|\vec{\rho}\,| = |y|$. *Si ottiene perciò:*

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\, 2\, \frac{\vec{i} \times \hat{\rho}}{|\vec{\rho}\,|} = \frac{\mu_0}{4\pi}\, 2\, i \frac{\hat{x} \times (\hat{y}\, y)}{|y|\, d} = \frac{\mu_0}{4\pi}\, 2\, \hat{z}\, i\, \frac{y}{|y|\, d}\,, \qquad (10)$$

e $\vec{B}$ *è diretto lungo* $\hat{z}$, *nel verso positivo per* $y > 0$ *e nel verso negativo per* $y < 0$. *In dettaglio, per vari punti:*

- *Punto* P_1: $\vec{\rho}_1 = (\hat{y})$ *cm,*
  $\vec{B}_1 = \hat{z}\, B_1 = \hat{z}\, \frac{\mu_0}{4\pi}\, 2\, i \frac{1}{|y_1|} = \hat{z}\; 10^{-7}\, 2\, \frac{1.5\, A}{10^{-2}\, m} =$
  $= \hat{z}\, 3 \times 10^{-5}$ *Tesla.*
- *Punto* P_2:
  $\vec{B}_2 = \hat{z}\, B_2 = -\hat{z}\, \frac{\mu_0}{4\pi}\, 2\, \frac{i}{|y_2|} = -\hat{z}\; 10^{-7}\, 2\, \frac{1.5\, A}{10 \times 10^{-2}\, m} =$
  $= -\hat{z}\, 3 \times 10^{-6}$ *Tesla.*
- *Punto* P_3:
  $\vec{B}_3 = \hat{z}\, B_3 = -\hat{z}\, \frac{\mu_0}{4\pi}\, 2\, \frac{i}{|y_3|} = -\hat{z}\; 10^{-7}\, 2\, \frac{1.5\, A}{10 \times 10^{-2}\, m} =$
  $= -\hat{z}\, 3 \times 10^{-5}$ *Tesla.*

5. *In un campo magnetico di 1.2 Tesla, un fascio di protoni si muove lungo una circonferenza di raggio $R = 6.2$ cm. Determinare direzione verso e valore del campo elettrico che è necessario instaurare nella stessa zona per rendere rettilinea la traiettoria. Fare un disegno schematico dell'apparato delineando il verso dei campi.(punti 5)*

Il moto circolare è prodotto dalla forza esercitata dal campo magnetico ($q_p vecv_p \times \vec{B}$) che fornisce la forza centripeta ($m_p v_p^2/R$) necessaria, essendo il raggio fissato, la velocità del protone lungo il cerchio può essere determinata (supponiamo il moto circolare nel piano x, y e $\vec{B} = (0.0, -|B| = -B)$, così che il moto circolare sarà in senso orario nel piano)

$$\text{da} \quad q_p \, v_p \, B = \frac{m_p v_p^2}{R} \quad \rightarrow \quad v_p = \frac{q_p \, R \, B}{m_p} \tag{11}$$

Applicando, nella stessa zona interessata dal campo magnetico, un campo elettrico ortogonale al campo magnetico e diretto lungo $\hat{y}$, ovvero $\vec{E} = (0, E = |E|, 0)$ nel momento in cui i protoni sono viaggiano con velocità $\vec{v}_p = (v_p = |v_p|, 0, 0)$, sollecitati dalla forza magnetica lungo la dire $-\hat{y}$, si potrà annullare la forza sui protoni

$$\vec{F}_p = \vec{F}_B + \vec{F}_E = q_p \, (\vec{E} + \vec{v}_p \times \vec{B}) = \hat{y} \, q_p \, (E - v_p \, B) \tag{12}$$

se vale la relazione

$$E = v_p \, B$$

ovvero se

$$\begin{aligned} E &= q_p \, B^2 \frac{R}{m_p} = \\ &\approx 1.602 \times 10^{-19} \, C \cdot 1.2^2 \, Tesla^2 \cdot \frac{6.2 \times 10^{-2} \, m}{1.67 \times 10^{-27} \, Kg} = \\ &= 8.6 \times 10^6 \; Volt/m \, . \end{aligned} \tag{13}$$

6. *(**facoltativo**) In un circuito composto da resistenza $R = 0.5 \; K\Omega$ e capacità $C = 10$ nF, poste in serie ed alimentate da una tensione alternata $V(t) = 30 \, Volt \, \sin 2\pi \, f \, t$, con $f = 5$ K Hz, determinare il valore massimo della differenza di potenziale ai capi della resistenza e della capacità. (punti 8).*

Il circuito è alimentato da una tensione alternata $V(t) = V_M \sin \omega t$ *con* $\omega = 2\pi f = 3.14 \times 10^4$ *rad/sec, ed il massimo valore di tensione* $V_M = 30$ *Volt. Sappiamo che la corrente che ne risulta deve essere alternata e con un'ampiezza massima* I_M *e con la stessa frequenza* f*, non necessariamente in fase con la tensione, quindi la corrente può essere scritta* $i(t) = I_M \sin(\omega t + \phi)$ *con* I_M *e* ϕ *da determinare in base all'equazione del circuito. Sapendo che la tensione ai capi della resistenza vale* $V_R(t) = R \cdot i(t)$ *per la legge di Ohm e che la tensione ai capi del condensatore vale* $V_C(t) = q(t)/C$*, dove* $q(t)$ *è la carica accumulata al tempo* t*, si scrivono le equazioni*

$$
\begin{aligned}
V(t) &= V_R(t) + V_C(t) \ , \\
\frac{dV(t)}{dt} &= \frac{dV_R(t)}{dt} + \frac{dV_C(t)}{dt} = R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\, i(t) \ , \quad \text{ovvero} \\
\omega\, V_M \cos \omega t &= R\, \omega\, I_M \, \cos(\omega t + \phi) + \frac{1}{C}\, I_M \, \sin(\omega t + \phi) \, ; \ \ \text{che diviene} \\
\omega\, V_M \cos \omega t &= R\, \omega\, I_M \, (\cos \omega t \, \cos \phi - \sin \omega t \, \sin \phi) + \frac{1}{C}\, I_M \, \sin \omega t \, \cos \phi + \\
&+ \frac{1}{C}\, I_M \, \cos \omega t \, \sin \phi \ ;
\end{aligned}
$$

e uguagliando i coefficienti di $\sin \omega t$ *e* $\cos \omega t$ *devono vale le uguaglianze*

$$
\begin{aligned}
\omega\, V_M &= R\, \omega\, I_M \, \cos \phi + \frac{1}{C}\, I_M \, \sin \phi \\
0 &= -R\, \omega\, I_M \, \sin \phi + \frac{1}{C}\, I_M \, \cos \phi \ ;
\end{aligned}
$$

ovvero (dalla seconda)

$$
\tan \phi = \frac{1}{\omega RC} \ , \quad \text{quindi} \quad \sin \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \, , \quad \cos \phi = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}
$$

che sostituita nella prima permette di calcolare I_M

$$
I_M = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = 9.3 \times 10^{-3} \, \text{Ampere} \, . \tag{14}
$$

Si ottengono le differenze di potenziale ai capi della resistenza:

$$
V_R(t) = Ri(t) = R\, I_M \sin(\omega t + \phi) \approx 4.65 \, Volt \, \sin(\omega t + \phi) \, ,
$$

e della capacità:

$$\begin{aligned} V_C(t) &= \frac{1}{C}\,q(t) = \frac{1}{C}\int I_M \sin(\omega t + \phi)\,dt = \\ &= -\frac{1}{\omega C}\,I_M\,\cos(\omega t + \phi) = -29.60\,Volt\,\cos(\omega t + \phi)\,. \end{aligned}$$