

Fisica 2 per biotecnologie: Prova scritta 3 Settembre 2012

Scrivere **IMMEDIATAMENTE, ED IN EVIDENZA**, sui due fogli protocollo consegnati (ed eventuali altri fogli richiesti) la seguente tabella:

NOME : Numero lettere del nome $NN = \dots\dots\dots$

COGNOME : Numero lettere del Cognome $NC = \dots\dots\dots$

NUMERO DI MATRICOLA : = NM

[esempio: Mario ($NN = 5$) Careri ($NC = 6$) matricola 12345 ($NM = 12345$)]

Testo unico per tutti

(tempo a disposizione circa 2 ore: l'orario della consegna verrà scritto sulla lavagna)

Per superare la prova è necessario accumulare almeno 18 punti seguendo le indicazioni. Si può usare **SOLTANTO** il libro di testo (o testo analogo) ed eventualmente le proprie relazioni di laboratorio.

Si prega di avere a disposizione sul tavolo un documento d'identità .

nb: prima di sostituirvi i valori numerici, scrivere (coerentemente con il testo del problema) le formule utilizzate e giustificarle brevemente. Laddove necessario illustrare con semplici figure il procedimento usato.

- 1.) Un condensatore di capacità $C_0 = NN/2 \mu\text{F}$ viene caricato alla differenza di potenziale $V_0 = NC$ Volt e scollegato dalla batteria. Il condensatore ha una resistenza interna R_0 finita (e non infinita come in un condensatore ideale!) cosicché la carica abbandona lentamente le armature. Dopo 24 ore l'energia immagazzinata nel condensatore è dimezzata.

(In pratica è come se una resistenza di valore R_0 fosse collegata tra le armature del condensatore, ovvero in parallelo ad esso. Attraverso tale resistenza il condensatore può scaricarsi.)

Calcolare:

- i) la carica che ha abbandonato le armature e quella ancora presente dopo 24 ore; **(punti 2)**
 - ii) la resistenza interna del condensatore. **(punti 3)**
- 2.) Un atomo di Elio viene doppiamente ionizzato (massa $M_{He^{++}} \approx 6.6 \cdot 10^{-27} \text{Kg}$) e accelerato da una differenza di potenziale $\Delta V = NM/7$ Volt. Uscito da questo campo elettrico l'atomo incontra una zona di campo magnetico uniforme ed ortogonale alla velocità \mathbf{V}_{He} acquisita. Il campo magnetico ha modulo $B = NC/10$ Tesla. Calcolare
- i) il raggio di curvatura R dell'orbita percorsa; **(punti 2)**
 - ii) il periodo di rivoluzione T . **(punti 3)**

- 3.) In un punto dello spazio il campo magnetico di un'onda elettromagnetica ha valore massimo $B_M = 3 \cdot NC \cdot 10^{-9}$ Tesla, quanto vale il valore massimo E_M del campo elettrico, nello stesso punto? (**punti 2**)

L'onda si propaga verso EST. Il campo magnetico oscilla verticalmente alla frequenza $f = 80.0$ MHz. Determinare la direzione, (**punti 2**), la frequenza di oscillazione ed il valore quadratico medio del campo elettrico trasportato dall'onda (**punti 2**). Quanto vale la sua intensità? (**punti 2**)

- 4.) Il lavoro di estrazione per effetto fotoelettrico di Sodio, Cesio, Rame e Ferro sono rispettivamente 2.3, 3.1, 4.7 e 4.5 eV.

i) Discutere (in maniera chiara) come misurare l'energia cinetica degli elettroni emessi dai quattro metalli quando su di essi incide radiazione in grado di emettere elettroni; (**punti 3**)

ii) Calcolare le quattro lunghezze d'onde massime che incidendo sui diversi metalli sono in grado di estrarre elettroni. (**punti 2**)

iii) Se si fa incidere su tutti e quattro i metalli radiazione di lunghezza d'onda pari a 310 nm, calcolare le energie cinetiche degli elettroni emessi. (**punti 2**)

iv) Quali i valori dei potenziali di arresto dei quattro metalli? (**punti 3**)

v) quanti elettroni verranno emessi al secondo e per cm^2 di metallo irradiato, se la radiazione incidente ha un'intensità di $I = NC/5 \cdot 10^{-2}$ Watt/ cm^2 ? (**punti 1**)

- 5.) Un atomo con più elettroni ha una dinamica complessa. Certe semplici proprietà possono però essere stimate usando il modello di Bohr per l'atomo di idrogeno e per atomi con un solo elettrone orbitante. Prendiamo, ad esempio l'atomo di Boro ($Z = 5$). L'elettrone orbitante esterno potrebbe essere descritto da un modello di Bohr in cui la carica del nucleo viene schermata dagli altri quattro elettroni. Se così fosse l'energia di ionizzazione dell'elettrone esterno dovrebbe risultare uguale a quella dell'atomo di idrogeno, ovvero 13.6 eV (discutere perché ...). In realtà l'energia di ionizzazione dell'elettrone esterno vale 8.26 eV.

Verificare che il numero atomico *effettivo* Z_{eff} invece di assumere il valore 1 come nell'atomo di idrogeno, vale circa 0.8 (*suggerimento: usare le formule dell'atomo di Bohr per una carica centrale pari a $Z_{eff}e$, dove e è il valore della carica elementare...*). (**punti 2**)

Secondo lo stesso modello si potrebbe stimare il raggio dell'orbita circolare dell'elettrone più interno. Questo infatti risente dell'attrazione del nucleo di carica $Ze...$ Stimare, ad esempio, il raggio dell'elettrone interno dell'atomo di Uranio ($Z = 92$). (**punti 2**)
Quanta energia viene richiesta per rimuovere tale elettrone interno? (**punti 2**)

Valori utili: avendo a disposizione il libro di testo si prega di usare quello per tutte le costanti e parametri necessari.

Fisica 2 per biotecnologie
Prova scritta: 3 Settembre 2012
Soluzioni

[soluzioni numeriche per i valori dell'esempio:

Mario (NN = 5) Careri (NC = 6) matricola 12345 (NM = 12345)]

- 1.) Un condensatore di capacità $C_0 = NN/2 \mu F$ viene caricato alla differenza di potenziale $V_0 = NC$ Volt e scollegato dalla batteria. Il condensatore ha una resistenza interna R_0 finita (e non infinita come in un condensatore ideale!) cosicché la carica abbandona lentamente le armature. Dopo 24 ore l'energia immagazzinata nel condensatore è dimezzata.

(In pratica è come se una resistenza di valore R_0 fosse collegata tra le armature del condensatore, ovvero in parallelo ad esso. Attraverso tale resistenza il condensatore può scaricarsi.)

L'energia del condensatore vale

$$\text{Energia} = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 = \frac{1}{2} \frac{NN}{2} \cdot 10^{-6} \cdot NC^2 \text{ Joule} = 4.5 \cdot 10^{-5} \text{ Joule},$$

e dopo 24 ore sarà ridotta a $2.25 \cdot 10^{-5}$ Joule e la differenza di potenziale sarà $V_C = V_0/\sqrt{2} = NC/\sqrt{2}$ Volt ≈ 4.24 Volt.

Calcolare:

- i) la carica che ha abbandonato le armature e quella ancora presente dopo 24 ore;
Vale la definizione $C_0 = Q/V_C$ da cui

$$Q = V_C \cdot C_0 = \frac{V_0 \cdot C_0}{\sqrt{2}} = \frac{V_0 \cdot C_0}{\sqrt{2}} = \frac{Q_0}{\sqrt{2}} = \frac{1.5 \cdot 10^{-5} \text{ Coulomb}}{\sqrt{2}} \approx 1.06 \cdot 10^{-5} \text{ Coulomb},$$

che è la carica residua dopo 24 ore; la carica che ha abbandonato il condensatore vale $\Delta Q = Q_0 - Q = Q_0 \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \right) \approx 0.44 \cdot 10^{-5} \text{ Coulomb}$.

- ii) la resistenza interna del condensatore.

Durante il processo di scarica vale la legge della scarica dei condensatori

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/(R_0 C_0)} = Q_0 e^{-t/\tau_0},$$

che dopo $t = \Delta t = 24^h = 86400 \text{ sec}$, diviene

$$\frac{Q_0}{\sqrt{2}} = Q_0 e^{-\Delta t/\tau_0}$$

cioè $\tau_0 = \Delta t / \log \sqrt{2} \rightarrow$

$$\rightarrow R_0 = \frac{\Delta t}{C_0 \log \sqrt{2}} \approx 99.7 \cdot 10^9 \text{ Ohm} = 99.7 \text{ G}\Omega.$$

2.) Un atomo di Elio viene doppiamente ionizzato (massa $M_{He^{++}} \approx 6.6 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$) e accelerato da una differenza di potenziale $\Delta V = NM/7 \text{ Volt}$. Uscito da questo campo elettrico l'atomo incontra una zona di campo magnetico uniforme ed ortogonale alla velocità \mathbf{V}_{He} acquisita. Il campo magnetico ha modulo $B = NC/10 \text{ Tesla}$. Calcolare

i) il raggio di curvatura R dell'orbita percorsa;

l'atomo di Elio acquista velocità grazie al campo elettrico a cui è sottoposto. L'energia cinetica acquisita è pari al lavoro che le forze elettriche esercitano su di esso, quindi

$$\frac{1}{2} M_{He} \mathbf{V}_{He}^2 = \Delta V \cdot Q_{He},$$

dove $Q_{He} = 2 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ Coulomb}$, dato che l'atomo è doppiamente ionizzato. La velocità risulta

$$V_{He} = \sqrt{2 \frac{\Delta V \cdot Q_{He}}{M_{He}}} \approx 4.14 \cdot 10^5 \text{ m/sec}.$$

Il Raggio di curvatura R è determinato dall'uguaglianza della forza magnetica che il campo esercita sulla particella carica ($\mathbf{F}_B = Q_{He} \mathbf{V}_{He} \times \mathbf{B}$) e la forza centripeta necessaria per compierla $|\mathbf{F}_c| = \frac{M_{He} \mathbf{V}_{He}^2}{R}$: Data l'ortogonalità della velocità rispetto al campo magnetico, risulta:

$$\frac{M_{He} \mathbf{V}_{He}^2}{R} = Q_{He} |\mathbf{V}_{He}| |\mathbf{B}|$$

ovvero

$$R = \frac{M_{He} |\mathbf{V}_{He}|}{Q_{He} |\mathbf{B}|} \approx \frac{6.6 \cdot 10^{-27} \text{ Kg} \cdot 4.14 \cdot 10^5 \text{ m/sec}}{2 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ Coulomb} \cdot 0.6 \text{ Tesla}} \approx 0.014 \text{ m} = 1.4 \text{ cm}.$$

ii) il periodo di rivoluzione T ;

il periodo vale la lunghezza della circonferenza percorsa ($2\pi R = 2\pi \frac{M_{He} |\mathbf{V}_{He}|}{Q_{He} |\mathbf{B}|}$) divisa la velocità con cui la percorre, cioè

$$T = 2\pi \frac{M_{He}}{Q_{He} |\mathbf{B}|} \approx 2.16 \cdot 10^{-7} \text{ sec}.$$

3.) In un punto dello spazio il campo magnetico di un'onda elettromagnetica ha valore massimo $B_M = 3 \cdot NC \cdot 10^{-9} \text{ Tesla}$, quanto vale il valore massimo E_M del campo elettrico, nello stesso punto?

Il massimo valore campo magnetico (B_M) è legato al massimo valore del campo elettrico (E_M) dalla relazione

$$E_M = c \cdot B_M \approx 2.998 \cdot 10^8 \text{ m/sec} \cdot 3 \cdot 10^{-9} \text{ Tesla} \approx 5.4 \text{ Volt/m},$$

essendo c la velocità della luce nel vuoto.

L'onda si propaga verso EST. Il campo magnetico oscilla verticalmente alla frequenza $f = 80.0 \text{ MHz}$. Determinare la direzione, la frequenza di oscillazione ed il valore quadratico medio del campo elettrico trasportato dall'onda. Quanto vale la sua intensità?

- La direzione è fissata dall'ortogonalità di direzione di propagazione, campo elettrico e magnetico; dunque se l'onda si propaga verso EST (direzione \hat{y}) ed il campo magnetico è verticale (direzione \hat{z}), il campo elettrico deve essere diretto lungo ($-\hat{x}$, in una terna sinistrorsa).
- la frequenza di oscillazione del campo elettrico deve essere identica a quella del campo magnetico, $f = 80.0 \text{ MHz}$.
- Il valore quadratico medio E_{qm} in un'onda a frequenza fissata risulta sempre la metà del suo valore massimo (al quadrato) per le proprietà delle medie temporali di funzioni sinusoidali (al quadrato!), dunque

$$E_{qm} = \frac{1}{2} E_M^2 \approx 14.56 (\text{Volt/m})^2.$$

- L'intensità è determinata dal vettore di Poynting mediato nel ciclo

$$\begin{aligned} I = \left\langle \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{E} \times \mathbf{B}| \right\rangle &= \frac{1}{\mu_0} \langle |\mathbf{E}| |\mathbf{B}| \rangle = \frac{1}{\mu_0 c} \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle = \frac{1}{\mu_0 c} E_{qm} = \frac{1}{2\mu_0 c} E_M^2 = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_M^2 \approx 0.039 \text{ Watt/m}^2. \end{aligned}$$

avendo usato la relazione $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$ ovvero $\frac{1}{\mu_0} = \epsilon_0 c^2$.

4.) Il lavoro di estrazione (W_0) per effetto fotoelettrico di Sodio, Cesio, Rame e Ferro vale rispettivamente 2.3, 3.1, 4.7 e 4.5 eV.

- i) Discutere (in maniera chiara) come misurare l'energia cinetica degli elettroni emessi dai quattro metalli quando su di essi incide radiazione in grado di emettere elettroni;

L'energia cinetica si misura attraverso il lavoro elettrico fatto sugli elettroni da un potenziale esterno (potenziale di arresto V_A) in grado di esercitare un lavoro sugli elettroni ($V_A \cdot q_e$) pari alla loro energia cinetica. Il minimo valore di V_A che annulla, dunque, la corrente elettrica, fissa l'energia cinetica:

$$\frac{1}{2} m_e v_e^2 = V_A \cdot q_e.$$

- ii) Calcolare le quattro lunghezze d'onde massime che incidendo sui diversi metalli sono in grado di estrarre elettroni. Dalla relazione fondamentale

$$hf = \frac{1}{2}m_e v_e^2 + W_0$$

si ricava la frequenza di soglia f_s sotto la quale non vi è emissione di elettroni

$$f \geq f_s = \frac{W_0}{h}$$

ovvero

$$\lambda \leq \frac{hc}{W_0} \approx \frac{12.4 \cdot 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{W_0 \text{ eV}} \approx 5391, 4000, 2638, 2755 \text{ \AA}.$$

- iii) Se si fa incidere su tutti e quattro i metalli radiazione di lunghezza d'onda $\lambda = 310 \text{ nm}$, calcolare le energie cinetiche degli elettroni emessi.

Evidentemente $\lambda = 310 \text{ nm} = 3100 \text{ \AA}$ è maggiore di $\lambda_s = 2638 \text{ e } 2755 \text{ \AA}$, quindi per questi due metalli l'energia del fotone incidente non è in grado di estrarre elettroni. Ne è riprova il calcolo dell'energia del fotone di $\lambda = 3100 \text{ \AA}$, $E_\gamma = hf = hc/\lambda = 12.4 \cdot 10^3 \text{ eV \AA} / 3100 \text{ \AA} \approx 4.0 \text{ eV} < 4.7 \text{ e } 4.5 \text{ eV}!!$

Ne concludiamo che solo per Sodio e Cesio gli elettroni verranno estratti e le energie cinetiche risultano:

$$\begin{aligned} E_{cinetica} &= \frac{1}{2}m_e v_e^2 = hf - W_0 = \\ &\approx 4.0 - 2.3 = 1.7 \text{ eV}; \text{ per Sodio}, \\ &\approx 4.0 - 3.1 = 0.9 \text{ eV}; \text{ per Cesio}. \end{aligned}$$

- iv) Quali i valori dei potenziali di arresto dei quattro metalli?

$$\begin{aligned} V_A = E_{cinetica}/q_e &= \frac{1}{2}m_e v_e^2/q_e = (hf - W_0)/q_e = \\ &\approx 1.7 \text{ Volt}; \text{ per Sodio}, \\ &\approx 0.9 \text{ Volt}; \text{ per Cesio}. \end{aligned}$$

- v) quanti elettroni verranno emessi al secondo e per cm^2 di metallo irradiato, se la radiazione incidente ha un'intensità di $I = 6/5 \cdot 10^{-2} \text{ Watt/cm}^2$?

Assumendo che ad ogni fotone incidente corrisponda un elettrone emesso, il numero di elettroni emessi al secondo per cm^2 , corrisponde al numero di fotoni incidenti al secondo per cm^2 :

$$\begin{aligned} n. \text{ fotoni incidenti/sec/cm}^2 &= I/hf = \\ &\approx 6/5 \cdot 10^{-2} \text{ Watt/cm}^2 / (4.0 \text{ eV} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ Joule/eV}) = \\ &\approx 1.87 \cdot 10^{16} / \text{sec/cm}^2. \end{aligned}$$

5.) Un atomo con più elettroni ha una dinamica complessa. Certe semplici proprietà possono però essere stimate usando il modello di Bohr per l'atomo di idrogeno e per atomi con un solo elettrone orbitante. Prendiamo, ad esempio l'atomo di Boro ($Z = 5$). L'elettrone orbitante esterno potrebbe essere descritto da un modello di Bohr in cui la carica del nucleo viene schermata dagli altri quattro elettroni. Se così fosse l'energia di ionizzazione dell'elettrone esterno dovrebbe risultare uguale a quella dell'atomo di idrogeno, ovvero 13.6 eV (discutere perché ...). In realtà l'energia di ionizzazione dell'elettrone esterno vale 8.26 eV.

Verificare che il numero atomico *effettivo* Z_{eff} invece di assumere il valore 1 come nell'atomo di idrogeno, vale circa 0.8 (suggerimento: usare le formule dell'atomo di Bohr per una carica centrale pari a $Z_{eff}e$, dove e è il valore della carica elementare...).

Per un atomo di carica nucleare Ze e con un solo elettrone orbitante, le energie di legame (quantizzate!) risultano (modello di Bohr)

$$E_n^Z = -\frac{1}{2} \frac{(k_e e^2)^2 m_e}{\hbar^2} \frac{Z^2}{n^2} = -13.6 \text{ eV} \frac{Z^2}{n^2}.$$

Nel caso dell'atomo di Boro l'elettrone esterno viene attirato da una carica "effettiva" $Z_{eff}e$ prodotta dalla carica nucleare Ze schermata dai quattro elettroni interni, quindi

$$E_n^{Z_{eff}} = -\frac{1}{2} \frac{(k_e e^2)^2 m_e}{\hbar^2} \frac{Z_{eff}^2}{n^2} = -13.6 \text{ eV} \frac{Z_{eff}^2}{n^2}.$$

Se lo "schermaggio" fosse perfetto l'elettrone esterno risentirebbe di una carica interna pari ad "e", come quella dell'atomo di idrogeno e quindi $Z_{eff} = 1$ e l'energia del livello fondamentale ($n = 1$) dell'ultimo elettrone orbitante risulterebbe -13.6 eV!

Sappiamo invece che la sua energia (sperimentale) vale 8.26 eV, come dice il testo. Dunque

$$13.6 \text{ eV} \frac{Z_{eff}^2}{(n=1)^2} = 8.26 \text{ eV},$$

da cui

$$Z_{eff} \approx \sqrt{\frac{8.26}{13.6}} \approx 0.8.$$

Secondo lo stesso modello si potrebbe stimare il raggio dell'orbita circolare dell'elettrone più interno. Questo infatti risente dell'attrazione del nucleo di carica Ze ... Stimare, ad esempio, il raggio dell'elettrone interno dell'atomo di Uranio ($Z = 92$). Quanta energia viene richiesta per rimuovere tale elettrone interno?

L'elettrone più interno non è schermato dagli altri elettroni e sperimenta l'attrazione nucleare dovuta alla carica $Ze = 92e$, nel caso dell'Uranio. In questo caso il suo raggio e la sua energia sono date dal modello di Bohr per atomi di carica nucleare Ze ed unico

elettrone orbitante

$$R_n = \frac{n^2 \hbar^2}{k_e Z e^2 m_e} = 0.53 \text{ \AA} \frac{n^2}{Z} \Big|_{(n=1, Z=92)} \rightarrow 0.006 \text{ \AA};$$
$$E_n^Z = -13.6 \text{ eV} \frac{Z^2}{n^2} \Big|_{(n=1, Z=92)} \rightarrow -115 \text{ KeV}.$$