Fisica 2 per biotecnologie: Prova scritta 04 Giugno 2012

Scrivere IMMEDIATAMENTE, ED IN EVIDENZA, sui due fogli protocollo consegnati (ed eventuali altri fogli richiesti) la seguente tabella:

NOME : .... Numero lettere del nome $NN =$ **.................**

COGNOME : .... Numero lettere del Cognome $NC =$ **.................**

NUMERO DI MATRICOLA : .... $= NM$
[esempio: Mario (NN = 5) Careri (NC = 6) matricola 12345 (NM = 12345)]

Si ricorda che coloro che hanno già esito positivo nella prova in itinere del 16 Aprile scorso, possono migliorare il loro voto svolgendo tutta la prova (verrà formalizzato l'esito più favorevole). Per ragioni di chiarezza tutti sono pregati di dichiarare le proprie intenzioni riportando una delle seguenti dichiarazioni (firmata).
NON DIMENTICARSI(!).

intendo svolgere l'intera prova, non ho superato la prova in itinere...........................(firma)

intendo svolgere l'intera prova, pur avendo superato la prova in itinere.....................(firma)

intendo svolgere solo la seconda parte avendo superato la prova in itinere..................(firma)

Testo unico per tutti

Per superare la prova è necessario accumulare almeno 18 punti seguendo le indicazioni. Si può usare SOLTANTO il libro di testo (o testo analogo) ed eventualmente le proprie relazioni di laboratorio. Avere a disposizione sul tavolo un documento d'identità .

nb: prima di sostituirvi i valori numerici, scrivere (coerentemente con il testo del problema) le formule utilizzate e giustificarle brevemente. Laddove necessario illustrare con semplici figure il procedimento usato.

Parte Prima (per chi svolge la prova intera: tempo a disposizione 2.30 ore)

1. Nel tentativo di realizzare un atomo di idrogeno, un elettrone ed un protone, all'inizio distanti NM millimetri, vengono avvicinati alla distanza di 0.53 Å$= 0.53 \cdot 10^{-10}$ m. Calcolare l'energia potenziale elettrostatica del sistema elettrone - protone quando essi sono distanti NM millimetri. Calcolare la stessa energia potenziale quando le due cariche distano 0.53 Å(esprimere i risultati in Joule ed in eV). Quanto lavoro delle forze elettriche è stato fatto per avvicinarli? È stato sfruttato del lavoro fatto da forze esterne per portare le cariche ad avvicinarsi? Discutere la situazione.
Ripercorrere l'esercizio usando un neutrone in luogo del protone. (**punti 6**)

2. Tre resistenze ($R_1 = (NN/2)\,\Omega$, $R_2 = (NN/2)\,\Omega$, $R_3 = (NN/3)\,\Omega$) sono collegate come in Figura 1. (a) ed alimentate da una batteria a $V_0 = NC$ Volt e resistenza interna

$r = (NN/10)\,\Omega$. Calcolare la resistenza equivalente di tutto il circuito e la corrente che circola nella resistenza R_2. Che frazione della potenza erogata dalla batteria viene dissipata in R_2?

Un condensatore di capacità $C = 2 \cdot NC\,\mu$Farad viene successivamente collegato in serie (vedi Figura 1. (b)), in modo che tutta la corrente del circuito lo possa alimentare. Dopo quanto tempo la differenza di potenziale ai suoi capi risulterà circa due terzi del valore finale? Quanto è questo valore finale? (si supponga il condensatore inizialmente scarico e si conti il tempo a partire dall'inizio della carica del condensatore). Quali ulteriori informazioni occorrerebbe avere per determinare il campo elettrico all'interno del condensatore supposto a facce piane e parallele? (**punti 4**)

Se la batteria viene sostituita da un alimentatore a corrente alternata $V = V_M \cos(\omega_0 t)$ con $\omega_0 = 2\pi f_0$ ed $f_0 = NM$ Hertz (vedi Figura 1. (c)), quale risulterà il rapporto $A(\omega_0)$ tra il valore massimo della tensione ai capi del condensatore e quello massimo (V_M) che alimenta il circuito? Aumentando la frequenza f_0 come varierà tale rapporto? (**punti 4**)

3. Fare almeno gli esercizi n. **2.**, **3.**, **4.** della parte Seconda sotto riportata.

Parte Seconda (per chi desidera integrare l'esito positivo della prova in itinere del 16 Aprile 2012: tempo a disposizione 2.30 ore)

1. Una spira quadrata di lato $l = NC/2$ cm, è collocata tra le espansione di un magnete in modo tale che il flusso del campo magnetico (uniforme) $\mathbf{B}_0$, prodotto dal magnete e concatenato con la spira, sia massimo. Quanto vale la corrente che circola nella spira se questa ha una resistenza totale $R = NN\,\Omega$?

All'istante $t = 0$ il campo magnetico viene spento ed il suo valore assoluto decresce linearmente da $B_0 = |\mathbf{B}_0| = NC/100$ Tesla a zero in $t_0 = 2$ secondi, ovvero $B(t) = B_0 \cdot [1 - t/t_0]$, rimanendo poi a zero per tempi oltre i 2 secondi. Calcolare la corrente nella spira in funzione del tempo nell'intervallo di tempo $0 \le t \le t_0$. Per $t > t_0$ a che valore si porta la corrente? (**punti 6**)

2. Un'onda elettromagnetica piana monocromatica è descritta dai campi elettrico ($\mathbf{E}$) e magnetico ($\mathbf{B}$) come di seguito indicati:

$$\mathbf{E}(y,t) = \hat{z}\, E_0 \cos(ky - \omega t)\ ,\ \text{diretto lungo la direzione}\, z\,, \tag{1}$$

$$\mathbf{B}(y,t) = \hat{x}\, B_0 \cos(ky - \omega t)\ ,\ \text{diretto lungo la direzione}\, x\,, \tag{2}$$

rappresenta una radiazione di lunghezza d'onda $\lambda = 5000$ Å che si propaga nel vuoto. In che direzione? Quanto vale k? quanto ω? Se l'intensità (media) dell'onda vale 5 mWatt/m^2, in una descrizione a fotoni, quanti fotoni al secondo attraversano una superficie di 1 m^2 perpendicolare alla direzione di propagazione? Quanto vale E_0? e B_0? (**punti 8**)

3. In un esperimento di Young per l'interferenza da due fenditure, la radiazione del precedente esercizio viene proiettata su di uno schermo lontano $L = NN/2$ m dalle due fenditure poste a distanza $d = NC \cdot 10^{-4}$ m. Calcolare la distanza tra i primi due picchi di intensità maggiore sullo schermo (escludendo la riga centrale). (**punti 6**)

Detta I_1 l'intensità (media) del primo picco ed I_2 l'intensità (media) del secondo, si trova $I_2/I_1 = 0.8$. Stimare e discutere la probabilità relativa dei fotoni al secondo che arrivano nella zona del primo e del secondo picco. (**punti 8**)

4. I fotoni emessi dalla transizione tra il secondo stato eccitato ($n = 3$) ed il primo ($n = 2$) dell'atomo di idrogeno, come descritti dal modello di Bohr, vengono utilizzati per estrarre elettroni da un metallo. Quanto deve valere il lavoro di estrazione del materiale perché i fotoni siano in grado di estrarre elettroni? Quale il numero (minimo) di fotoni al secondo che devono incidere per produrre una corrente di $NC/100\,\mu$ Ampere se il materiale risulta emettere elettroni? (**punti 5**)

5. Un elemento radioattivo ha vita media $\tau = NM/2$ anni (circa). Quanto tempo deve trascorrere perché la sua attività odierna sia ridotta di 8 volte? (**punti 4**)

Valori utili: avendo a disposizione il libro di testo si prega di usare quello per tutte le costanti e parametri necessari.

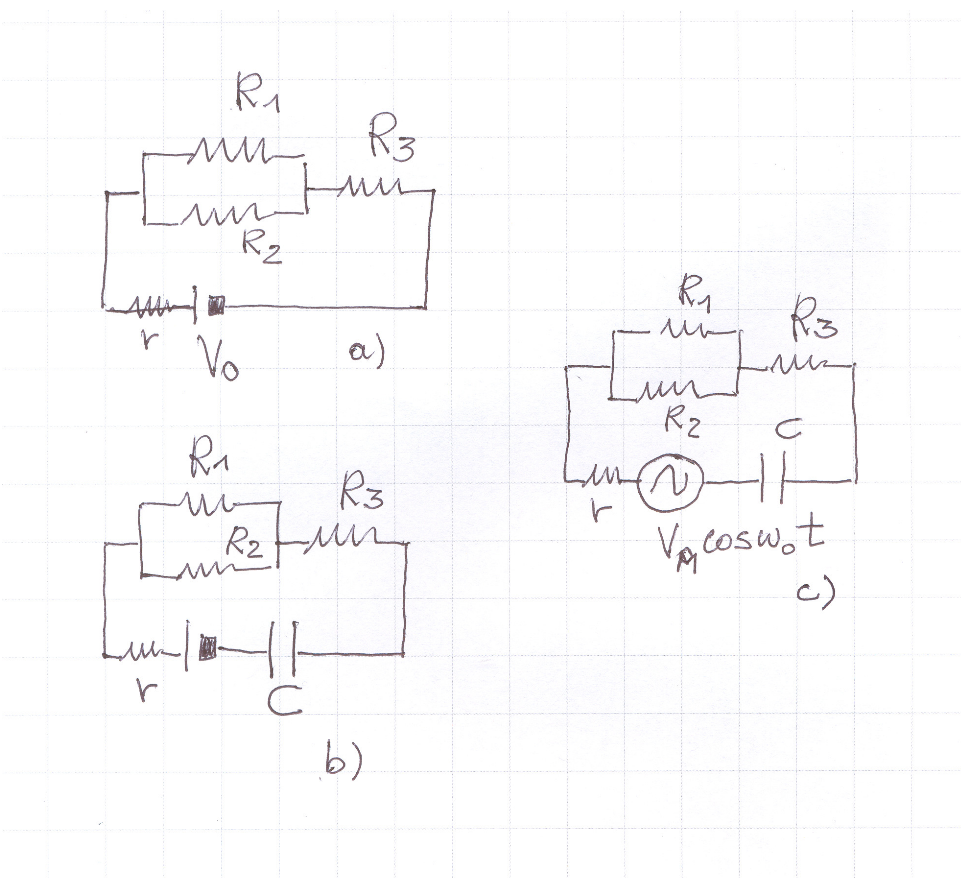

Figure 1: Schema di circuiti per l'esercizio **2.** della Prima parte.

Fisica 2 per biotecnologie
Prova scritta: 4 Giugno 2012
Soluzioni

[soluzioni numeriche per i valori dell'esempio:
Mario (NN = 5) Careri (NC = 6) matricola 12345 (NM = 12345)]

Parte Prima

1.) *Nel tentativo di realizzare un atomo di idrogeno, un elettrone ed un protone, all'inizio distanti NM millimeteri, vengono avvicinati alla distanza di 0.53 Å= $0.53 \cdot 10^{-10}$ m. Calcolare l'energia potenziale elettrostatica del sistema elettrone - protone quando essi sono distanti NM millimetri. (esprimere i risultati in Joule ed in eV).*

$$\begin{aligned} E_{p_1} &= k_e \frac{q_e \cdot q_p}{d_{12}} = \\ &\approx (2.998)^2 \cdot 10^9 \, \frac{\text{Newton m}^2}{\text{Coulomb}^2} \, \frac{(-1.602 \cdot 10^{-19}\,\text{Coulomb}) \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}\,\text{Coulomb}}{NM \cdot 10^{-3}\,\text{m}} = \\ &\approx -2.31 \cdot 10^{-25}/NM\,\text{Joule} = -1.87 \cdot 10^{-29}\,\text{Joule} = -1.17 \cdot 10^{-10}\,\text{eV}. \end{aligned}$$

Calcolare la stessa energia potenziale quando le due cariche distano 0.53 Å. (esprimere i risultati in Joule ed in eV).

$$\begin{aligned} E_{p_2} &= k_e \frac{q_e \cdot q_p}{d_{12}} = \\ &\approx (2.998)^2 \cdot 10^9 \, \frac{\text{Newton m}^2}{\text{Coulomb}^2} \, \frac{(-1.602 \cdot 10^{-19}\,\text{Coulomb}) \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}\,\text{Coulomb}}{0.53 \cdot 10^{-10}\,\text{m}} = \\ &\approx -4.35 \cdot 10^{-18}\,\text{Joule} = -27.2\,\text{eV}. \end{aligned}$$

Quanto lavoro delle forze elettriche è stato fatto per avvicinarli?

Il lavoro fatto dalle forze elettriche $L_E = E_{p_1} - E_{p_2} = 27.2$ eV, essendo trascurabile l'energia potenziale all'inizio.
È stato sfruttato del lavoro fatto da forze esterne per portare le cariche ad avvicinarsi? Discutere la situazione.
Il lavoro è fatto interamente dalle forze elettriche attrattive delle due cariche, nessun lavoro esterno è necessario.
Ripercorrere l'esercizio usando un neutrone in luogo del protone.
Se al luogo del protone ci fosse un neutrone (a carica nulla) le forze elettriche si annullano e tutto il problema perde di senso.

2.) *Tre resistenze ($R_1 = (NN/2)\,\Omega$, $R_2 = (NN/2)\,\Omega$, $R_3 = (NN/3)\,\Omega$) sono collegate come in figura ed alimentate da una batteria a $V_0 = NC$ Volt e resistenza interna*

$r = (NN/10)\,\Omega$. *Calcolare la resistenza equivalente di tutto il circuito e la corrente che circola nella resistenza* R_2.

$$R_{totale} = r + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3 = NN\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = NN\,\frac{41}{60} \approx 3.42\,\Omega\,.$$

$$i = \frac{V_0}{R_{totale}} = \frac{NC}{NN}\,\frac{60}{41} \approx 1.76\,\text{Ampere}\,.$$

Che frazione della potenza erogata dalla batteria viene dissipata in R_2*?*

$$i_2 = \frac{V_2}{R_2} = V_0 - (R_3 + r)i = \frac{NC - NN\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{10}\right)\frac{NC}{NN}\frac{60}{41}}{\frac{NN}{2}} = 2\,\frac{NC}{NN}\,\frac{15}{41} \approx 0.88\,\text{Ampere}\,;$$

$$\text{frazione} = \frac{R_2 i_2^2}{V_0 i} = \frac{26^2}{30 \cdot 41} \approx 0.18\,.$$

Un condensatore di capacità $C = 2 \cdot NC\,\mu$*Farad viene successivamente collegato in serie, in modo che tutta la corrente del circuito lo possa alimentare. Dopo quanto tempo la differenza di potenziale ai suoi capi risulterà circa due terzi del valore finale? Quanto è questo valore finale? (si supponga il condensatore inizialmente scarico e si conti il tempo a partire dall'inizio della carica del condensatore).*

Per la legge di carica del condensatore si ha che la sua costante di tempo vale

$$R_{totale}C = \frac{41}{30}\,NN \cdot NC\,\mu sec = 41\,\mu sec.$$

Il potenziale ai capi del condensatore segue la legge

$$V_c(t) = V_0\left(1 - e^{-\frac{t}{R_{totale}C}}\right)$$

che per $t = R_{totaleC}$ *risulta*

$$V_c(R_{totale}C) = V_0\left(1 - e^{-1}\right) = V_0\left(1 - \frac{1}{e}\right) \approx V_0\left(1 - \frac{1}{2.72}\right) \approx \frac{2}{3}\,V_0\,.$$

Dunque il valore finale è V_0 *ed i 2/3 di* V_0 *sono raggiunti dopo circa 41* μ*sec. (Il valore esatto è* $t = R_{totale}C\,\ln 3 \approx 45.05\,\mu sec$*, ottenuto da* $2V_0/3 = V_0\left(1 - e^{-\frac{t}{R_{totale}C}}\right)$*).*

Quali ulteriori informazioni occorrerebbe avere per determinare il campo elettrico all'interno del condensatore supposto a facce piane e parallele?

Occorrerebbe sapere il valore dello spessore d *tra le piastre:*

$$E = \frac{V_c}{d}$$

per la definizione stessa di $|V_c| = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = Ed$.

Se la batteria viene sostituita da un alimentatore a corrente alternata $V = V_M \cos(\omega_0 t)$ con $\omega_0 = 2\pi f_0$ ed $f_0 = NM$ Hertz, quale risulterà il rapporto $A(\omega_0)$ tra il valore massimo della tensione ai capi del condensatore e quello massimo (V_M) che alimenta il circuito? Aumentando la frequenza f_0 come varierà tale rapporto?

Il circuito è un filtro passa basso e si ha

$$A(\omega_0) = \frac{1}{\omega_0 C} \frac{1}{\sqrt{R^2_{totale} + \frac{1}{\omega_0^2 C^2}}} = \frac{1}{\sqrt{R^2_{totale}\omega_0^2 C^2 + 1}} \approx 0.30\,.$$

$A(\omega_0)$ diminuisce all'aumentare di ω_0.

Parte Seconda

1.) *Una spira quadrata di lato $l = NC/2$ cm, è collocata tra le espansione di un magnete in modo tale che il flusso del campo magnetico (uniforme) $\mathbf{B}_0$, prodotto dal magnete e concatenato con la spira, sia massimo. Quanto vale la corrente che circola nella spira se questa ha una resistenza totale $R = NN\,\Omega$?*

Il testo descrive una situazione in cui la spira è collocata ortogonalmente al campo magnetico uniforme prodotto dai magneti, così da massimizzare il flusso concatenato. Quando il campo magnetico NON varia non è presente alcuna forza elettromotrice indotta e quindi non può esserci corrente nella spira.

All'istante $t = 0$ il campo magnetico viene spento ed il suo valore assoluto decresce linearmente da $B_0 = |\mathbf{B}_0| = NC/100$ Tesla a zero in $t_0 = 2$ secondi, ovvero $B(t) = B_0 \cdot [1 - t/t_0]$, rimanendo poi a zero per tempi oltre i 2 secondi. Calcolare la corrente nella spira in funzione del tempo nell'intervallo di tempo $0 \le t \le t_0$. Per $t > t_0$ a che valore si porta la corrente? Per leggi dell'induzione

$$fem = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d(B(t)\,l^2)}{dt} = +\frac{B_0 l^2}{t_0} = \frac{NC}{100}\frac{1}{2}\left(\frac{NC}{2}\cdot 10^{-2}\right)^2 = 2.7\cdot 10^{-5}\,\text{Volt.}$$

E la corrente indotta vale:

$$i = \frac{fem}{R} = \frac{2.7\cdot 10^{-5}\,\text{Volt}}{NN\,\Omega} = 5.4\cdot 10^{-6}\,\text{Ampere}\,.$$

Per $t > t_0$, il campo magnetico non varia più e di nuovo la fem e la corrente sono nulle.

2.) *Un'onda elettromagnetica piana monocromatica è descritta dai campi elettrico ($\mathbf{E}$) e magnetico ($\mathbf{B}$) come di seguito indicati:*

$$\mathbf{E}(y,t) = \hat{z}\,E_0\,\cos(ky - \omega t)\,,\ \text{diretto lungo la direzione}\,z\,, \tag{3}$$
$$\mathbf{B}(y,t) = \hat{x}\,B_0\,\cos(ky - \omega t)\,,\ \text{diretto lungo la direzione}\,x\,, \tag{4}$$

rappresenta una radiazione di lunghezza d'onda $\lambda = 5000$ Å che si propaga nel vuoto. In che direzione? Quanto vale k? quanto ω?

L'onda si propaga nel verso del vettore $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, ovvero nella direzione $\hat{y}$, come si verifica anche dalla scrittura dell'argomento del coseno: $(ky - \omega t)$ che sottolinea che l'onda si propaga nella direzione positiva dell'asse y. Dunque la scrittura dell'onda è coerente.

k è il numero d'onda

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{5000 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}} \approx 1.26 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m}^{-1}\,,$$

vale la

$$\frac{\omega}{k} = c = 2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/sec} \quad \rightarrow \quad \omega \approx 3.77 \cdot 10^{15}\,\mathrm{rad/sec}\,.$$

Se l'intensità (media) dell'onda vale 5 mWatt/m^2, in una descrizione a fotoni, quanti fotoni al secondo attraversano una superficie di 1 m^2 perpendicolare alla direzione di propagazione? Quanto vale E_0? e B_0?

$$\bar{I} = \langle \epsilon_o\, c\, \mathbf{E}^2 \rangle = \frac{1}{2}\epsilon_o\, c\, E_0^2 = 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Watt/m^2}\,, \quad \rightarrow \quad E_0 = \sqrt{\frac{2\bar{I}}{\epsilon_0 c}} \approx 1.94\,\mathrm{Volt/m}\,.$$

L'energia trasportata da ogni singolo fotone vale

$$E_\gamma = hf = \frac{hc}{\lambda} \approx \frac{12.41 \cdot 10^{3}\,\mathrm{eV}\,\text{Å}}{5000\,\text{Å}} \approx 2.48\,\mathrm{eV} \approx 3.97 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{Joule}\,.$$

Di conseguenza il numero di fotoni al secondo per m^2 $\frac{dN_\gamma}{dt}$ devono essere tali che

$$\bar{I} = \frac{dN_\gamma}{dt} \cdot E_\gamma\,, \quad \rightarrow \quad \frac{dN_\gamma}{dt} \approx \frac{5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Watt/m^2}}{3.97 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{Joule}} \approx 1.26 \cdot 10^{16}\,\mathrm{fotoni/sec/m^2}\,.$$

$E_0/B_0 = c$, quindi

$$B_0 = E_0/c \approx 6.47 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{Tesla}\,.$$

3. *In un esperimento di Young per l'interferenza da due fenditure, la radiazione del precedente esercizio viene proiettata su di uno schermo lontano $L = NN/2$ m dalle due fenditure poste a distanza $d = NC \cdot 10^{-4}$ m. Calcolare la distanza tra i primi due picchi di intensità maggiore sullo schermo (escludendo la riga centrale).*

Essendo l'angolo molto piccolo, valgono le relazioni

$$\frac{x_n}{L} = \tan\vartheta_n \approx \sin\vartheta_n = \frac{\lambda}{d}n \approx \vartheta_n\,,$$

dove x_n è la distanza in metri della riga n-sima dal centro della figura di interferenza sullo schermo. Quindi:

$$x_n = L \cdot \frac{\lambda}{d} n = \frac{NN}{2} \mathrm{m} \cdot \frac{5000 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}}{NC \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}} n \approx 2.1\,\mathrm{mm} \;\; (\mathrm{se\,n} = 1)\,; \quad 4.2\,\mathrm{mm} \;\; (\mathrm{se\,n} = 2)\,.$$

La distanza relativa vale 2.1 mm.

Detta $\bar{I}_1$ l'intensità (media) del primo picco ed $\bar{I}_2$ l'intensità (media) del secondo, si trova $\bar{I}_2/\bar{I}_1 = 0.8$. Stimare e discutere la probabilità relativa dei fotoni al secondo che arrivano nella zona del primo e del secondo picco.

Chiamate A e B le due fenditure, potremmo scrivere che le intensità nella zona 1 e nella zona 2, sono determinate dal campo elettrico totale presente in 1 ($\mathbf{E}_1$) ed in 2 ($\mathbf{E}_2$) . D'altra parte i campi elettrici $\mathbf{E}_1$ ed $\mathbf{E}_2$, risultano dalla somma dei campi elettrici che arrivano in 1 e 2 dalle due fenditure A e B. Ovvero:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{E}_{A1} + \mathbf{E}_{B1}\,; \\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{E}_{A2} + \mathbf{E}_{B2}\,. \end{aligned}$$

L'interferenza è precisamente dovuta a questa somma che dipende proprio dalle fasi dei due campi. Le intensità si scriveranno:

$$\begin{aligned} I_1 &= \epsilon_o c \mathbf{E}_1^2 = \epsilon_o c \left(\mathbf{E}_{A1} + \mathbf{E}_{B1}\right)^2 \;; \\ I_2 &= \epsilon_o c \mathbf{E}_2^2 = \epsilon_o c \left(\mathbf{E}_{A2} + \mathbf{E}_{B2}\right)^2 \;. \end{aligned}$$

E le intensità medie divengono

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \epsilon_o c \langle \mathbf{E}_1^2 \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_o\, c\, E_{01}^2 = \epsilon_o c \langle \left(\mathbf{E}_{A1} + \mathbf{E}_{B1}\right)^2 \rangle\,; \\ \bar{I}_2 &= \epsilon_o c \langle \mathbf{E}_2^2 \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_o\, c\, E_{02}^2 = \epsilon_o c \langle \left(\mathbf{E}_{A2} + \mathbf{E}_{B2}\right)^2 \rangle\,. \end{aligned}$$

D'altra parte in un'interpretazione a fotoni dello stesso fenomeno le intensità medie sono legate al numero medio di fotoni al secondo per unità di superficie (quindi al m^2), $\langle \frac{dN_\gamma}{dt} \rangle$ che incidono sullo schermo, ovvero

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= hf \cdot \langle \frac{dN_{1\gamma}}{dt} \rangle = \langle \epsilon_o c \mathbf{E}_1^2 \rangle\,; \\ \bar{I}_2 &= hf \cdot \langle \frac{dN_{2\gamma}}{dt} \rangle = \langle \epsilon_o c \mathbf{E}_1^2 \rangle\,, \end{aligned}$$

come già utilizzato nell'esercizio **2.** *appena descritto. Da ultimo (in analogia col decadimento) il numero (medio) di fotoni che giungono nella zona 1 al secondo per m^2 sarà legato alla probabilità (π_1) che ve ne giunga uno al secondo per m^2 passando* *per le fenditure moltiplicato il numero di fotoni (N_γ) che incidono sulle fenditure, in formule:*

$$
\begin{aligned}
\langle \frac{dN_{1\gamma}}{dt} \rangle &= \pi_1 \cdot N_\gamma\,; \\
\langle \frac{dN_{2\gamma}}{dt} \rangle &= \pi_2 \cdot N_\gamma\,,
\end{aligned}
$$

In conclusione:

$$0.8 = \frac{\bar{I}_2}{\bar{I}_1} = \frac{\langle \frac{dN_{2\gamma}}{dt} \rangle}{\langle \frac{dN_{1\gamma}}{dt} \rangle} = \frac{\pi_2}{\pi_1}\,;$$

le probabilità sono nello stesso rapporto delle intensità .

4. *I fotoni emessi dalla transizione tra il secondo stato eccitato ($n = 3$) ed il primo ($n = 2$) dell'atomo di idrogeno, come descritti dal modello di Bohr, vengono utilizzati per estrarre elettroni da un metallo. Quanto deve valere il lavoro di estrazione del materiale perché i fotoni siano in grado di estrarre elettroni? Quale il numero (minimo) di fotoni al secondo che devono incidere per produrre una corrente di $NC/100\,\mu$ Ampere se il materiale risulta emettere elettroni?*

I fotoni emessi nella transizione $E_3 - E_2$ hanno energia (secondo lo schema di Bohr $E_n = -13.6\,\mathrm{eV}/n^2$)

$$E_3 - E_2 = 13.6\,\mathrm{eV} \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^3}\right) \approx 1.89\,\mathrm{eV}\,.$$

Perché gli elettroni vengano estratti dal metallo, il lavoro di estrazione W_0 deve soddisfare la relazione $W_0 < 1.89\,\mathrm{eV}$.

Assumendo che ogni fotone che incide sul metallo sia in grado di estrarre un elettrone, il numero minimo di fotoni incidenti al secondo dN_γ/dt necessari per creare la corrente di $NC/100\,\mu$Ampere, è pari al numero di elettroni al secondo dN_e/dt necessari per produrre detta corrente:

$$i = \frac{NC}{100} \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Ampere} = \frac{dN_e}{dt}\,|q_e| = \frac{dN_\gamma}{dt}\,|q_e|\,,$$

ovvero

$$\frac{dN_\gamma}{dt} = \frac{i}{|q_e|} \approx \frac{NC}{100} \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Ampere}\,\frac{1}{1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{Coulomb}} \approx 3.7 \cdot 10^{11}\,\mathrm{fotoni\,incidenti/sec}$$

5. *Un elemento radioattivo ha vita media $\tau = NM/2$ anni (circa). Quanto tempo deve trascorrere perché la sua attività odierna sia ridotta di 8 volte?*

L'attività del materiale decade con la stessa legge con cui decadono il numero di atomi presenti nel materiale e che lo costituiscono:

$$
\begin{aligned}
N(t) &= N(0)\,e^{-\lambda t} = N(0)\,e^{-t/\tau}\,; \quad (\text{numero di atomi presenti})\,; \\
A(t) = \left|\frac{dN}{dt}\right| &= \lambda N(0)\,e^{-\lambda t} = \left|\frac{dN}{dt}\right|_{t=0} e^{-\lambda t} = A(0)\,e^{-\lambda t}\,; \quad (\text{attivita}')\,;
\end{aligned}
$$

Dunque in un tempo pari al tempo di dimezzamento

$$T_{1/2} \approx \frac{0.693}{\lambda} = 0.693 \cdot \tau = 0.693 \cdot \frac{NM}{2} \, \mathrm{anni} \approx 4278 \, \mathrm{anni}$$

l'attività di minuisce della metà . Per diminuire 8 volte deve passare un tempo pari a tre volte $T_{1/2}$*, ovvero 12834 anni.*