

Fisica 2 per biotecnologie: Prova scritta 9 Luglio 2012

Scrivere **IMMEDIATAMENTE, ED IN EVIDENZA**, sui due fogli protocollo consegnati (ed eventuali altri fogli richiesti) la seguente tabella:

NOME : Numero lettere del nome $NN = \dots\dots\dots$

COGNOME : Numero lettere del Cognome $NC = \dots\dots\dots$

NUMERO DI MATRICOLA : = NM

[esempio: Mario ($NN = 5$) Careri ($NC = 6$) matricola 12345 ($NM = 12345$)]

Testo unico per tutti

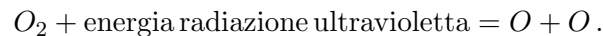
(tempo a disposizione 2 ore e 30 minuti)

Per superare la prova è necessario accumulare almeno 18 punti seguendo le indicazioni. Si può usare **SOLTANTO** il libro di testo (o testo analogo) ed eventualmente le proprie relazioni di laboratorio.

Si prega di avere a disposizione sul tavolo un documento d'identità .

nb: prima di sostituirvi i valori numerici, scrivere (coerentemente con il testo del problema) le formule utilizzate e giustificarle brevemente. Laddove necessario illustrare con semplici figure il procedimento usato.

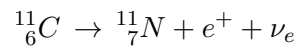
- 1.) Dare una stima della capacità (in Farad) di un assone lungo $L = NN$ cm di raggio $a = NN \mu\text{m}$ sapendo che lo spessore della membrana vale $d = 10^{-8}$ m e la costante dielettrica relativa circa 3. (**punti 3**)
 - Se il potenziale (a riposo) applicato alla membrana vale $V_a = V_{\text{interno}} - V_{\text{esterno}} = -NC \cdot 10$ mVolt, che valore assume il campo elettrico attraverso la membrana? (**punti 3**)
 - Se durante la propagazione del potenziale d'azione gli ioni N_a^+ entrano nella cellula al ritmo di $NN \cdot 10^{-7}$ moli/($\text{m}^2 \cdot \text{sec}$) quanta potenza deve fornire il sistema di pompaggio degli ioni N_a^+ per mantenere questo flusso di ioni contro un potenziale di $V_i = +30$ mVolt? (**punti 4**) (*suggerimento: la potenza è determinata dal prodotto del potenziale per la corrente che lo attraversa...*)
 - Stimare l'energia necessaria per trasmettere il potenziale d'azione lungo la membrana assumendola uguale all'energia immagazzinata nella membrana quando sottoposta alla tensione complessiva $V_i - V_a$. (**punti 4**)
 - Quanto vale la potenza media in un secondo (in Watt) necessaria perché NM neuroni trasmettano 100 impulsi in un secondo? (**punti 4**)
- 2.) La produzione di Ozono negli strati alti dell'atmosfera è dovuta alla presenza di raggi ultravioletti in grado di dissociare le molecole di ossigeno presenti creando concentrazioni di ossigeno mono-atomico:



Sapendo che per dissociare NN moli di O_2 occorrono $117 \cdot NN$ Kcal, identificare l'energia del singolo fotone (ultravioletto) necessario per dissociare la molecola O_2 ed esprimerla in Joule e in eV. Identificare il valore della lunghezza d'onda della radiazione (**punti 5**).

3.) Il principio di funzionamento della PET (Positron Emission Tomography) è basato sull'interazione di un positrone (e^+) (emesso da un nucleo ricco di protoni quale, ad esempio, $^{11}_6C$) con un elettrone (e^-) della materia circostante. Le due particelle si annichilano e due fotoni vengono emessi in direzioni (praticamente) opposte. Cerchiamo di comprendere un po' più in dettaglio il processo.

- a) emissione di e^+ . Il nucleo $^{11}_6C$ ha una vita media di 20.39 minuti (vedi Giancoli pag. 943): calcolare quando tempo occorre attendere perché $NN \cdot 10^5$ atomi di Carbonio-11 si riducano della metà. Questo tempo dipende dal numero assoluto di atomi di Carbonio presenti all'inizio (nel nostro caso $NN \cdot 10^5$ atomi)? perché? quali ipotesi sono necessarie? (*suggerimento: se all'inizio ci fossero solo 6 atomi di Carbonio avremmo potuto raggiungere lo stesso risultato?*) **(punti 3)**
- b) Il positrone prodotto dal Carbonio-11 secondo la reazione



si propaga nella materia in cui il Carbonio-11 viene inserito (ad esempio il corpo umano) per un massimo di (circa) 3.8 mm, dopodiché si combina con un elettrone presente per formare un singolare stato legato detto positronio, cioè un "atomo" di idrogeno in cui il protone è sostituito dal positrone (che ha la stessa carica, ma massa molto più piccola). Questo singolare stato legato mostra le stesse caratteristiche dell'atomo di idrogeno, ma ha vita media molto breve (circa 10^{-10} sec). In particolare si può verificare che lo spettro dell'energia è simile allo spettro di Bohr per l'atomo di idrogeno, le energie valgono

$$E_n^p = -\frac{6.8 \text{ eV}}{n^2};$$

(ricordiamoci che nel caso dell'atomo di idrogeno $E_n^H = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2} = -2 \cdot \frac{6.8 \text{ eV}}{n^2}$!) Consideriamo le lunghezze d'onda dei fotoni emessi dallo stato con $n = NN$ quando questo ritorna allo stato fondamentale ($n = 1$) sia nel caso dell'atomo di idrogeno che del positronio: quale il loro valore in nanometri? **(punti 4)**

- c) Nell'annichilazione del positrone e dell'elettrone emergono due fotoni identici in lunghezza d'onda ed emessi in direzioni opposte: perché? **(punti 2)**
- Fornire ordini di grandezza di quantità che giustificano questo tipo di emissione e discuterle. **(punti 6)**

Valori utili: avendo a disposizione il libro di testo si prega di usare quello per tutte le costanti e parametri necessari.

Fisica 2 per biotecnologie

Prova scritta: 9 Luglio 2012

Soluzioni

[soluzioni numeriche per i valori dell'esempio:

Mario (NN = 5) Careri (NC = 6) matricola 12345 (NM = 12345)]

- 1.) Dare una stima della capacità (in Farad) di un assone lungo $L = NN$ cm e di raggio $a = NN$ μm sapendo che lo spessore della membrana vale $d = 10^{-8}$ m e la costante dielettrica relativa 3.

la capacità è assimilabile a quella di un condensatore a facce piane e parallele, dato che lo spessore $d \ll a$. Si ha dunque (indicando con A la superficie laterale del cilindro ed ϵ_r la costante dielettrica relativa)

$$\begin{aligned} C &= \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{2\pi a \cdot L}{d} \approx 3 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Farad/m} \frac{2\pi NN \cdot 10^{-6} \text{ m} NN \cdot 10^{-2} \text{ m}}{10^{-8} \text{ m}} = \\ &= 6\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} NN^2 \text{ Farad} \approx 4.17 \cdot 10^{-9} \text{ Farad}. \end{aligned}$$

Se il potenziale (a riposo) applicato alla membrana vale $V_a = V_{\text{interno}} - V_{\text{esterno}} = -NC \cdot 10$ mVolt, che valore assume il campo elettrico attraverso la membrana?

Supponendo il campo elettrico uniforme e trascurando effetti di bordo

$$E = \frac{|V_a|}{d} = \frac{NC \cdot 10 \text{ mVolt}}{10^{-8} \text{ m}} = NC \cdot 10^6 \text{ Volt/m} = 6 \cdot 10^6 \text{ Volt/m}.$$

Se durante la propagazione del potenziale d'azione gli ioni N_a^+ entrano nella cellula al ritmo di $NN \cdot 10^{-7}$ moli/($\text{m}^2 \cdot \text{sec}$) quanta potenza deve fornire il sistema di pompaggio degli ioni N_a^+ per mantenere questo flusso di ioni contro un potenziale di $V_i = +30$ mVolt? (suggerimento: la potenza è determinata dal prodotto del potenziale per la corrente che lo attraversa...)

La potenza perché la corrente I fluisca sotto la differenza di potenziale V_i vale $P = I \cdot V_i$. Nel nostro caso la corrente dovuta agli ioni vale: il numero di ioni che attraversano la membrana in un secondo $\left(\frac{dn}{dt}\right)$ moltiplicato la carica dello ione (q_e),

$$\begin{aligned} I &= q_e \left(\frac{dn}{dt}\right) = q_e NN \cdot 10^{-7} \text{ moli}/(\text{m}^2 \cdot \text{sec}) \cdot N_A \cdot \text{area membrana} = \\ &= q_e NN \cdot 10^{-7} \text{ moli}/(\text{m}^2 \cdot \text{sec}) \cdot N_A \cdot 2\pi a \cdot L = \\ &= q_e NN \cdot 10^{-7} \text{ moli}/(\text{m}^2 \cdot \text{sec}) \cdot N_A \cdot 2\pi NN \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot NN \cdot 10^{-2} \text{ m} = \\ &\approx 2\pi 1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 6.02 \cdot 10^{23} \cdot NN^3 \cdot 10^{-15} \text{ Coulomb/sec} \\ &\approx 7.57 \cdot 10^{-8} \text{ Ampere}. \end{aligned}$$

E la potenza

$$P = I \cdot V_i \approx 30 \text{ mVolt} \cdot 7.57 \cdot 10^{-8} \text{ Ampere} \approx 2.27 \cdot 10^{-9} \text{ Watt} .$$

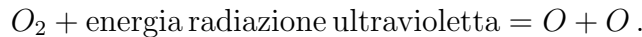
Stimare l'energia necessaria per trasmettere il potenziale d'azione lungo la membrana assumendola uguale all'energia immagazzinata nella membrana quando sottoposta alla tensione complessiva $V_i - V_a$. L'energia immagazzinata nella membrana vale

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} (V_i - V_a)^2 C \approx 1.7 \cdot 10^{-11} \text{ Joule}$$

Quanto vale la potenza media in un secondo (in Watt) necessaria perché NM neuroni trasmettano 100 impulsi in un secondo?

$$\text{Potenza media} = \frac{\text{Lavoro}}{1 \text{ sec}} = W \cdot NM \cdot 100 \approx 2.1 \cdot 10^{-5} \text{ Watt} .$$

- 2.) La produzione di Ozono negli strati alti dell'atmosfera è dovuta alla presenza di raggi ultravioletti in grado di dissociare le molecole di ossigeno presenti creando concentrazioni di ossigeno mono-atomico:



Sapendo che per dissociare NN moli di O_2 occorrono $117 \cdot NN$ Kcal, identificare l'energia del singolo fotone (ultravioletto) necessario per dissociare la molecola O_2 ed esprimerla in Joule e in eV.

Dunque per dissociare una mole di O_2 occorrono 117 Kcal. Dividendo per il numero di Avogadro, si ottengono le Kcal necessarie per dissociare una molecola, e possono essere convertite in Joule ($1 \text{ cal} = 4.186 \text{ Joule}$)

$$W = 117 \cdot 10^3 \cdot 4.186 / N_A \approx 8.14 \cdot 10^{-19} \text{ Joule} \approx 5.08 \text{ eV} .$$

Identificare il valore della lunghezza d'onda della radiazione

$$hf = W \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{hc}{W} \approx \frac{6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Joule} \cdot \text{sec} \cdot 2.998 \cdot 10^8 \text{ m/sec}}{8.14 \cdot 10^{-19} \text{ Joule}} \approx 244 \text{ nm} .$$

- 3.) Il principio di funzionamento della PET (Positron Emission Tomography) è basato sull'interazione di un positrone (e^+) (emesso da un nucleo ricco di protoni quale, ad esempio, $^{11}_6C$) con un elettrone (e^-) della materia circostante. Le due particelle si annichilano e due fotoni vengono emessi in direzione (praticamente) opposta. Cerchiamo di comprendere un po' più in dettaglio il processo.

- a) emissione di e^+ . Il nucleo $^{11}_6\text{C}$ ha una vita media di 20.39 minuti (vedi Giancoli pag. 943): calcolare quando tempo occorre attendere perché $NN \cdot 10^5$ atomi di Carbonio-11 si riducano della metà .

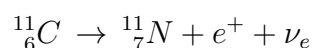
Questo tempo dipende dal numero assoluto di atomi di Carbonio presenti all'inizio (nel nostro caso $NN \cdot 10^5$ atomi)? perché ? quali ipotesi sono necessarie? (suggerimento: se all'inizio ci fossero solo 6 atomi di Carbonio avremmo potuto raggiungere lo stesso risultato?)

Evidentemente il tempo di dimezzamento

$$T_{1/2} = 0.693 \cdot \tau = 0.693 \cdot 29.39 \approx 20.37 \text{ minuti},$$

non dipende dal numero di atomi presenti in origine. È però un concetto statistico di origine probabilistica e come tale legato alla legge dei grandi numeri, solo per un numero molto elevato di atomi ha senso dire che trascorso tale tempo il numero di atomi rimasti è (CIRCA) la metà . Per un piccolo numero di atomi il tempo di dimezzamento non è legato al numero di atomi presenti dopo un lasso di tempo corrispondente, se non con grandi incertezze (fluttuazioni).

- b) Il positrone prodotto dal Carbonio-11 secondo la reazione



si propaga nella materia in cui il Carbonio-11 viene inserito (ad esempio il corpo umano) per un massimo di (circa) 3.8 mm, dopodiché si combina con un elettrone presente per formare un singolare stato legato detto positronio, cioè un "atomo" di idrogeno in cui il protone è sostituito dal positrone (che ha la stessa carica, ma massa molto più piccola). Questo singolare stato legato mostra le stesse caratteristiche dell'atomo di idrogeno, ma ha vita media molto breve (circa 10^{-10} sec). In particolare si può verificare che lo spettro dell'energia è simile allo spettro di Bohr per l'atomo di idrogeno, le energie valgono

$$E_n^p = -\frac{6.8 \text{ eV}}{n^2};$$

(ricordiamoci che nel caso dell'atomo di idrogeno $E_n^H = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2} = -2 \cdot \frac{6.8 \text{ eV}}{n^2}$!) Consideriamo le lunghezze d'onda dei fotoni emessi dallo stato con $n = NN$ quando questo ritorna allo stato fondamentale ($n = 1$) sia nel caso dell'atomo di idrogeno che del positronio: quale il loro valore in nanometri?

le differenze di energie definiscono la frequenza del fotone emesso nei due casi

$$\begin{aligned} hf|_{\text{positronio}} &= E_{NN}^p - E_1^p = 6.8 \text{ eV} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{NN^2} \right) = 6.8 \text{ eV} \left(\frac{24}{25} \right); \\ hf|_{\text{idrogeno}} &= E_{NN}^H - E_1^H = 13.6 \text{ eV} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{NN^2} \right) = 13.6 \text{ eV} \left(\frac{24}{25} \right); \end{aligned}$$

ovvero

$$\lambda|_{\text{positronio}} = \frac{hc}{6.8 \text{ eV} \left(\frac{24}{25}\right)} \approx 189.95 \text{ nm};$$
$$\lambda|_{\text{idrogeno}} = \frac{hc}{13.6 \text{ eV} \left(\frac{24}{25}\right)} \approx 94.98 \text{ nm};$$

cioè $\lambda|_{\text{positronio}} / \lambda|_{\text{idrogeno}} = 2$.

- c) Nell'annichilazione del positrone e dell'elettrone emergono due fotoni identici in lunghezza d'onda ed emessi in direzioni opposte: perché ?

Fornire ordini di grandezza di quantità che giustificano questo tipo di emissione e discuterle.

L'annichilazione delle due particelle deve produrre due fotoni che abbiano energia pari alla somma delle energie delle particelle stesse prima dell'annichilazione: energia a riposo $m_e c^2 \approx 0.51 \text{ MeV}$ ed energia cinetica T_e che sarà molto minore di $m_e c^2$. Dallo studio dell'atomo di Bohr per l'idrogeno sappiamo, infatti, che l'energia cinetica vale esattamente il valore dell'energia di legame, ma col segno positivo, dunque dell'ordine di circa 10 eV (6.8 per il positronio), valore molto molto minore della energia a riposo $m_e c^2 \approx 0.51 \cdot 10^6 \text{ eV}$. (si noti che il rapporto $T_e/(m_e c^2) \approx 10^{-5}!!!$). Dunque i due fotoni emergono ognuno con energia (circa) $m_e c^2$. Inoltre per la conservazione della quantità di moto essi saranno emessi in direzioni opposte: all'inizio la quantità di moto era infatti piccola, (visto che l'energia cinetica era piccola) praticamente nulla, dunque la quantità di moto deve restare nulla anche dopo l'annichilazione: i due fotoni devono viaggiare in direzioni opposte.